

Eine objektorientierte Simulationsumgebung für die Analyse von Schwingungsvorgängen bei Achterbahnfahrten

Von der Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Abteilung Maschinenbau

und Verfahrenstechnik der

Universität Duisburg-Essen

zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEUR

Dr.-Ing.

genehmigte Dissertation

von

Christian Sebastian Malessa

aus

Moers, Deutschland

Referent: Prof. Dr.-Ing. Andrés Kecskeméthy

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Dieter Schramm

Tag der mündlichen Prüfung: 29.01.2016

„Große Zeit ist's immer nur, wenn's beinahe schiefgeht, wenn man jeden Augenblick fürchten muß: jetzt ist alles vorbei. Da zeigt sich's. Courage ist gut, aber Ausdauer ist besser. Ausdauer, das ist die Hauptsache.“

Theodor Fontane

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Mechanik und Robotik an der Universität Duisburg-Essen unter partieller Förderung der Stiftung Maurer Söhne im Rahmen des Projektes „Reduktion von Flatterschwingungen bei der schnellen Fahrt von Fahrzeugen auf Achterbahnschienen“

Zunächst möchte ich meinen herzlichen Dank an Herrn Prof. Dr.-Ing. Andrés Kecskeméthy für die Möglichkeit der wissenschaftlichen Weiterbildung aussprechen. Die Zeit am Lehrstuhl war nicht immer einfach, aber stets lehrreich und inspirierend. Auch möchte ich mich für die detaillierte Korrektur der vorliegenden Arbeit und die wertvollen Ratschläge herzlich bedanken.

Ebenfalls möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Dieter Schramm für die Übernahme des Mitberichts danken. Auch wenn mein Studium in den USA nicht in den Bearbeitungszeitraum der Dissertation fällt, möchte ich mich auf diesem Weg noch einmal explizit für die Möglichkeit und die damalige Unterstützung bedanken.

Weiterhin danke ich herzlich allen Kollegen und Mitarbeitern am Lehrstuhl für Mechanik und Robotik. Es ist nicht selbstverständlich, dass während einer so arbeitsreichen Zeit ein Arbeitsklima geschaffen wird, aus dem Freundschaften entstehen. Dafür bin ich sehr dankbar. Ebenfalls danke ich allen Studenten die durch die Anfertigung von wissenschaftlichen Arbeiten einen spürbaren Beitrag zu der vorliegenden Dissertation geleistet haben. Ein besonderer Dank gilt Herrn Dr.-Ing. Francisco Geu Flores. Ohne seine, über den gesamten Zeitraum andauernde, selbstlose Unterstützung wäre ein erfolgreicher Abschluss sicher nicht möglich gewesen.

Stellvertretend für die Maurer AG möchte ich mich bei Herrn Dr. Martin Schneider sowie Dr. Martin Tändl für die finanzielle und fachliche Unterstützung bedanken.

Für die eingeräumten Möglichkeiten und den Freiraum während der finalen Bearbeitung danke ich herzlich Herrn Dirk Gunia sowie Dr.-Ing. Torsten Wey von der Ford Werke GmbH.

Ein riesiger Dank gilt meiner Familie, die mich während des Studiums und der Promotion immer selbstlos unterstützt hat. Ohne das Vertrauen meiner Eltern wäre ich sicher nie so weit gekommen. Ebenfalls danke ich der Familie meiner Frau, die jederzeit bedingungslos hinter mir stand.

Ein außergewöhnlicher Dank gilt meinem langjährigen Wegbegleiter, Bürokollegen, Trauzeugen, Reisebegleiter und bestem Freund Christian Michael. Ohne seinen fachlichen Rat, seinen Optimismus und seine lebensfrohe Art wäre vieles in den letzten dreizehn Jahren nicht möglich gewesen. Ich wünsche Dir und deiner bald noch etwas größeren Familie alles Gute mein Freund, vor allem viel Gesundheit. Ich hoffe, dass unsere Freundschaft noch lange bestehen bleibt.

Ebenfalls möchte ich meinen Dank an zwei weitere sehr gute Freunde richten. Herrn Dr.-Ing. Marcel Langer sowie Patrick Niedzwetzki. Ohne die unzähligen Tage des gemeinsamen Lernens während unseres Studiums wäre dies alles sicher nicht zustanden gekommen.

Für die Hingabe und Unterstützung während der gesamten Promotionszeit bin ich meiner Frau Melina unendlich dankbar. Während der langen, manchmal nicht einfachen Zeit hast du meine Entscheidungen für die Promotion niemals in Frage gestellt und mich mit all deiner Kraft unterstützt. Hierfür möchte ich mich von Herzen bei dir bedanken. Ich freue mich auf viele weitere Jahre mit dir und unserer kleinen Familie. Ich liebe dich!

Düsseldorf, im März 2016

Christian Malessa

Für meine geliebte Frau Melina

Kurzfassung

In der vorliegenden Dissertationsschrift wird für die Simulation von Schienenfahrzeugen auf räumlichen Trajektorien die Anregung des Fahrzeuges durch die Modellierung von realen Schienengeometrien inklusive möglicher Schienenabweichungen realisiert. Hierzu werden zunächst verschiedene Ansätze zur Interpolation und Approximation von Schienenabweichungen untersucht. Es kann gezeigt werden, dass, unabhängig vom gewählten Ansatz, die Interpolation der Schienenabweichungen eine unrealistische Anregung des Fahrzeuges zur Folge hat. Im Gegensatz hierzu kann durch die Approximation der Schienenabweichungen die Anregung reduziert werden. Hierbei hat das Ausmaß der Approximation (Glättung) einen signifikanten Einfluss auf die Qualität der Simulationsergebnisse. Die Arbeit zeigt, dass das Ausmaßes der Approximation durch Analyse der modellierten Abweichungen einfach „von Hand“ bestimmt werden kann. Die Wirksamkeit der Approximation kann durch Verifikation mit realen Beschleunigungsmesswerten bestätigt werden.

Neben der gewählten Schienenmodellierung ist die Parametrisierung des gewählten Hysteresekontaktkraftmodells für eine realitätsnahe Anregung des Fahrzeuges entscheidend. Die vorliegende Arbeit zeigt, dass klassische Ansätze zur numerischen Parameteridentifikation mit Hilfe eines Optimierungsproblems aufgrund von Simulationszeiten von circa 80 Sekunden und daraus folgender langer Zeit für die Auswertung einer Kostenfunktion nicht praktikabel sind. Aus diesem Grund werden durch Variation der Kontaktkraftparameter und anschließender Analyse der Simulationsergebnisse mit Hilfe einer neu eingeführten Metrik im Zeit- und Frequenzbereich die Modellparameter durch ein neu entwickeltes semi-automatisches Identifikationskonzept bestimmt. Die Wirksamkeit des Konzeptes kann in der vorliegenden Dissertationsschrift durch die Verifikation mit realen Beschleunigungsmesswerten bestätigt werden. So kann im Zeit- bzw. Frequenzbereich eine um bis zu 59% bzw. 98% verbesserte Übereinstimmung zwischen Mess- und Simulationsergebnissen erreicht werden.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur und Abkürzungen XVII

1	Einleitung	1
1.1	Problemstellung	2
1.2	Literaturübersicht	2
1.3	Inhalt und Ziel der vorliegenden Arbeit	7
2	Modellierung von Schienengeometrien und Schienenabweichungen mit Hilfe von Splines	9
2.1	Grundlagen räumlicher Kurven	9
2.1.1	Eigenschaften räumlicher Kurven	9
2.1.2	Parametrisierung von räumlichen Kurven nach der Bogenlänge .	10
2.2	Darstellungsformen von Koordinatensystemen	11
2.2.1	Frenet-Koordinatensystem	11
2.2.2	Darboux-Koordinatensystem	13
2.3	Interpolation und Approximation von Messpunkten mit räumlichen Kurven	15
2.3.1	Bezier-Kurven	15
2.3.2	Basis-Splines	18
2.3.3	Dierckx-Splines	21
2.3.4	Shape-Preserving-Splines	23
2.4	Modellierung und Analyse von Schienengeometrien	28
2.4.1	Erstellen von Layouts	28
2.4.2	Berechnung und Darstellung von Schienenabweichungen	29

2.4.3	Methoden zur Modellierung von Schienenabweichungen	30
2.4.4	Berechnung von modellierten Schienenabweichungen	31
3	Grundlagen der Modellbildung von Mehrkörpersystemen	32
3.1	Methoden zur Modellierung von Mehrkörpersystemen	32
3.1.1	Lagrange'sche Gleichungen erster Art	32
3.1.2	Projektion auf Minimalkoordinaten	33
3.1.3	Objektorientierte Modellierung dynamischer Systeme mit kine- tostatischen Übertragungselementen	35
3.2	Rad-Schiene-Kontakt- und Reibkraftmodell	37
3.2.1	Kontakt zwischen zwei Zylindermantelflächen	37
3.2.2	Ausgewählte Übertragungsfunktionen von Kontaktkraftelementen	39
3.2.3	Roll-/ Gleitreibungsmodell	42
3.2.4	Begleitender Schienenzylinder entlang eines Splines	45
3.3	Modellierung des genutzten Gesamtfahrzeugmodells	49
3.3.1	Aufspaltung der Freiheitsgrade für mögliche Teillinearisation .	49
3.3.2	Fahrzeugachse	52
3.3.3	Kopplung von Fahrzeugachsen	53
3.3.4	Kopplung von Fahrzeugen	56
3.4	Auswahl eines geeigneten Integrationsverfahrens	57
3.4.1	Integration mit variabler und fester Schrittweite	57
3.4.2	Integration mit variabler Schrittweite mit und ohne Ereignis- Steuerung	60
3.5	Kinetostatische Grundobjekte zur objektorientierten Schwingungssimulation von Achterbahnfahrzeugen	61

3.5.1	MoCylindricalContactElement	61
3.5.2	MoCylindricalContactAndFrictionElement	62
3.5.3	MoCurveJoint	65
4	Analyse der Methoden zur Modellierung von Schienenabweichungen	67
4.1	Methoden zur Analyse von Schwingungen	67
4.1.1	Summe der Fehlerquadrate	67
4.1.2	Spektraldichte	69
4.1.3	Rainflow-Analyse	71
4.1.4	Eigenschaften und Aufbereitung der Mess- und Simulationsdaten	73
4.2	Analyse der Fahrzeugschwingungen bei interpolierten Schienenabweichungen	74
4.2.1	Interpolation der Schienenabweichungen mit Shape-Preserving- Splines	75
4.2.2	Interpolation der Schienenabweichungen mit Dierckx-Splines . .	77
4.3	Analyse der Fahrzeugschwingungen bei approximierten Schienenabwei- chungen mit Dierckx-Splines	79
4.3.1	Analyse der Auswirkung des Glättungsfaktors S auf den Schie- nenverlauf	80
4.3.2	Analyse der resultierenden Schwingungen bei einer praktikablen Auswahl des Glättungsfaktors ($S=0.0002$)	82
4.4	Analyse und Vergleich der Mess- und Simulationsergebnisse	85
5	Identifikation von Modellparametern anhand von „Heatmaps“	88
5.1	Analyse verschiedener Metriken zur Identifikation von Modellparame- tern mit Hilfe von Heatmaps	88
5.1.1	Definition einer Metrik zur Identifikation von Parametern	88

5.1.2	Visualisierung und Auswertung der Metrik mit Hilfe von Heatmaps	89
5.1.3	Sensitivitätsanalyse der verschiedenen Kontaktkraftparameter durch die Auswertung der simulierten Schwingungen des Modells . . .	91
5.2	Verifikation des entwickelten Identifikationskonzeptes am Beispiel von approximierten Schienenabweichungen	95
5.2.1	Identifikation neuer Modellparameter	95
5.2.2	Verifikation und Validierung der neuen Simulationsergebnisse . .	97
5.2.3	Auswertung der Identifikationsergebnisse	99
5.3	Analyse von Metrikanpassungen	99
5.4	Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse	101
6	Zusammenfassung und Ausblick	103
	Bibliography	105
A	Detaillierte Identifikationsergebnisse mit interpolierten Schienenab- weichungen	115
A.1	Parameteridentifikation: Abweichungen interpoliert mit Shape-Preserving- Splines	116
A.2	Parameteridentifikation: Abweichungen interpoliert mit Dierckx-Splines	119
B	Detaillierte Identifikationsergebnisse mit angepasster Metrik	122
B.1	Variation I : Erhöhte Gewichtung der Vertikalrichtung	123
B.2	Variation II : Gesamtmetrikreduktion auf Zeitbereich	126
B.3	Variation III : Gesamtmetrikreduktion auf Frequenzbereich	129

Nomenklatur und Abkürzungen

Vektoren werden grundsätzlich durch ${}^a_b\mathbf{r}_c$ dargestellt. Hierbei beschreibt a das Koordinatensystem \mathcal{K}_a , in welchem der Vektor zerlegt wurde. b beschreibt das Koordinatensystem \mathcal{K}_b , in welchem die Bewegung gemessen wird und c das Zielkoordinatensystem \mathcal{K}_c . Das weltfeste Koordinatensystem ist \mathcal{K}_0 . Sollte der Vektor im Zielkoordinatensystem zerlegt sein, gilt $a = c$. Vereinfacht gilt ${}_0\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_c$. Der Betrag und somit die Länge eines Vektors wird durch zwei Betragsstriche der Form $\|{}^a_b\mathbf{r}_c\|$ dargestellt. Des Weiteren kann in Verbindung mit einer Transformationsmatrix ${}^a\mathbf{R}_b$ ein Vektor in jedem beliebigen Koordinatensystem durch ${}^a\mathbf{r} = {}^a\mathbf{R}_b {}^b\mathbf{r}$ zerlegt werden. Zusätzlich gilt:

u	Kurvenparameter
\tilde{u}	Projizierter Kurvenparameter
s	Bahnkoordinate
$(\cdot)'$ bzw. $\frac{d(\cdot)}{du/ds}$	Ableitung nach dem Kurvenparameter u bzw. der Bahnkoordinate s
t	Zeit
$(\dot{\cdot})$ bzw. $\frac{d(\cdot)}{dt}$	Ableitung nach der Zeit t
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$	Partielle Ableitung nach x
$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$	Skalarprodukt zweier Vektoren
$\mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j$	Kreuzprodukt zweier Vektoren
$\Delta\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$	Differenz zweier Vektoren
\mathbf{r}^T	Transponierter Vektor
T	Trajektorie, Bahnkurve, Raumkurve
D	Kurvenintervall
C^n	n -fache C -Kontinuität
G^n	n -fache G -Kontinuität
T	Tupel
\underline{t}	Normierte Tangente

\underline{n}	Normierter Normalenvektor
\underline{b}	Normierter Binormalenvektor
κ	Krümmung einer Kurve
ρ	Krümmungsradius einer Kurve
τ	Torsion einer Kurve
\underline{h}	Vektorfeld
\underline{c}	Eckpunkte des charakteristischen Polynoms einer Bezier-Kurve bzw. Kontrollpunkte eines B-Spline bzw. Stützstellen von Dierckx- und Shape-Preserving-Splines
$B_{i,n}$	Basisfunktion einer Bezier-Kurve
$i!$	Fakultät der Zahl i
f^n	Funktion f mit Grad n
$N_{i,k}$	Basisfunktion eines Basis-Splines
$\underline{\lambda}$	Knotenvektor eines Basis-Splines
$F(\underline{c}), G(\underline{c})$	Kostenfunktionen, Nebenbedingung des Spline Fitting Algorithmus nach Dierckx
ω_i	Gewichtungsfaktor des i -ten Summanden der Kostenfunktion
S	Glättungsfaktor („ <i>engl.: Smoothingfaktor</i> “)
σ_j	Tension-Faktor des j -ten Abschnitts eines Shape-Preserving-Spline
N	Anzahl der Iterationen bei der Bestimmung von σ_j
$B_{j,\sigma>0}$	Basisfunktionen des Shape-Preserving-Spline
S_w	Spurweite
d_y	Schienenabweichung in Lateralrichtung
d_z	Schienenabweichung in Vertikalrichtung
Δd_i	Schienenabweichung nach der Bahnkoordinate s differenziert

X	Lösungsraum eines Optimierungsproblems
\underline{x}	Designvektor eines Optimierungsproblems
\mathbf{M}	Massenmatrix
\mathbf{J}_f	Jacobi-Matrix in Verbindung mit Lagrange'schen Gleichungen erster Art
$\underline{\phi}$	Vektor der Bindungsgleichungen
\underline{F}	Vektor der verallgemeinerten Kräfte
\underline{b}	Vektor der Coriolis-, Zentrifugalkräfte und gyroskopischen Terme
\underline{x}	Vektor der allgemeinen Lagekoordinaten
\underline{q}	Vektor der verallgemeinerten Koordinaten
\mathbf{B}	Geschwindigkeits-Übertragungsmatrix
\underline{w}	Geschwindigkeitswinder („ <i>engl.</i> : <i>Wrench</i> “)
$\underline{Q} = \underline{t}$	Kraftwinder („ <i>engl.</i> : <i>Twist</i> “)
\mathbf{J}_q	Jacobi-Matrix in Verbindung mit kinetostatischen Übertragungselementen
$\underline{\Phi}$	Übertragungsfunktion eines kinetostatischen Übertragungselements
$\underline{\tau}$	Momentenvektor eines kinetostatischen Übertragungselements
\underline{f}	Kraftvektor eines kinetostatischen Übertragungselementen
\underline{u}_i	Richtungsvektor der Rotationsachse eines Zylinders i
d	Kürzester Abstand zwischen zwei Geraden
R_i	Radius eines Zylinders i
$\underline{\omega}_i$	Winkelgeschwindigkeit eines Körpers i
\underline{v}_i	Translatorische Geschwindigkeit eines Körpers i
\underline{F}_K	Vektor der Kontaktkraft zwischen zwei Körpern
k	Federkonstante einer linearen Feder
D	Dämpfungskonstante eines linearen Dämpfers
\dot{d}^-	Differenzgeschwindigkeit im ersten Moment des Kontakts

χ	Hysteresedämpfungsfaktor
e	Stoßzahl
\underline{p}	Vektor der Kontaktkraftmodellparameter
\dot{s}, \hat{s}	Projizierte translatorische Tangentialgeschwindigkeit
\underline{F}_R	Vektor der Reibkraft
\underline{M}_L	Vektor des Lagermomentes
\underline{M}_R	Vektor des Reibmomentes
M	Momentanpol
μ_L	Lagerreibungskoeffizient
ϵ	Verschiebung der Kontaktkraft bei Rollreibung
μ	Gleitreibungskoeffizient
$\text{Rot}(\varphi, \theta, \psi)$	Kurzform einer Rotationsmatrix mit drei Rotationswinkeln
α_i	Freiheitsgrade eines Fahrzeugchassis
γ_i	Freiheitsgrade einer Koppelstange
ΔE	Prozentuale Energieabweichung
λ	Skalierungsfaktor des rückprojizierten Kraftwinders
F_i	Teilmetrik
F	Gesamtmetrik
$A(f)$	Fast-Fourier-Transformation von Signal $a(t, s)$
$\hat{A}(f)$	Spektrale Leistungsdichte von Signal $a(t, s)$
N_l	Anzahl der ganzen Schleifen in Verbindung mit einer Rainflow-Analyse
\hat{a}	Amplitude von Signal a
\bar{a}	Mittelwert von Signal a
λ	Wellenlänge im Zusammenhang mit spektraler Leistungsdichte
\check{k}	Startwert von Parameter k

\hat{F}_i	Maximaler Fehler in der Teilmetrik F_i
α_i	Gewichtungsfaktor einer Teilmetrik F_i
LR	Laufрад
SR	Seitenrad
GR	Gegenrad
SPS	Shape-Preserving-Spline
FFT	Fast-Fourier-Transformation
DFFT	Diskrete Fast-Fourier-Transformation
PSD	Spektrale Leistungsdichte („ <i>engl.: Power-Spectral-Density</i> “)
DPSD	Diskrete Spektrale Leistungsdichte („ <i>engl.: Discrete Power-Spectral-Density</i> “)
LMS	Summe der Fehlerquadrate („ <i>engl.: Least Min Square</i> “)
sin	Sinus
cos	Cosinus
tan	Tangens
sinh	Sinus Hyperbolicus
cosh	Cosinus Hyperbolicus

1 Einleitung

Die Simulation von Mehrkörpersystemen ist seit mehreren Jahrzehnten ein fester Bestandteil des Entwicklungsprozesses technischer Systeme. Abhängig von der vorliegenden Problemstellung reicht der Anwendungsfall von einfachen Modellen mit wenigen Körpern über Modelle mit einer Vielzahl von Körpern und komplexen Kombinationen von Gelenken bis hin zu hybriden Systemen, bestehend aus starren und flexiblen Strukturen. Unabhängig von dem Detailgrad kann durch Modellbildung und Simulation der Aufwand an Zeit und Kosten verringert werden, da ein wesentlich geringerer Anteil an Realversuchen und damit einhergehenden Prototypen notwendig ist. Die daraus folgenden Einsparungen von Ressourcen sind der Grund für einen äußerst weitläufigen Einsatzbereich in nahezu alle Branchen des Maschinen- und Anlagenbaus.

Ein spezieller Anwendungsbereich der Mehrkörpersimulation ist die Analyse von Schwingungen zur gezielten Untersuchung und Verbesserung des Komfortverhaltens bzw. zur Erhöhung der Dauerfestigkeit von Systemen. Diese Analysen kommen häufig in der Automobilindustrie, aber auch bei der Entwicklung von Schienenfahrzeugen zum Einsatz. Ein Sonderbereich stellt hierbei die Entwicklung von Achterbahnen bzw. Achterbahnfahrzeugen dar. Der Grund hierfür liegt zum einen in den im Vergleich zu herkömmlichen Zügen hohen dynamischen Belastungen des Fahrzeuges, zum anderen in der beschränkten Möglichkeit, das Gesamtsystem während der Entwicklung und der Fertigung zu testen. Des Weiteren steigt durch immer spektakulärere Bahngeometrien und Fahrzeugkonzepte sowie stetig steigende Fahrgeschwindigkeiten die Belastung auf das Fahrzeug und das Tragwerk. Um daraus resultierende kosten- und zeitintensive Wartungen zu verringern, ist bereits während der Planung und Konstruktion eine genaue Kenntnis über die im Fahrzeug auftretenden Lastwechsel und daraus resultierenden Vibrationen von großem Vorteil. Diese können aufgrund der oben genannten Rahmenbedingungen jedoch nur durch realitätsnahe Simulationen erhalten werden. Eine Möglichkeit hierfür bieten kommerzielle, frei auf dem Markt erhältliche Mehrkörpersimulationsprogramme. Diese Programme bieten in den meisten Fällen eine einfache Handhabung und erlauben somit auch eine Nutzung ohne detailliertes Expertenwissen. Aufgrund der vielfältigen Einsatzbereiche kann jedoch oft keine ausreichende Detailtiefe bei der Modellierung, keine speziell auf das Problem abgestimmte Numerik sowie keine ausreichenden Analysemöglichkeiten der Ergebnisse geboten werden. Zur Lösung dieser Probleme müssen speziell auf den Anwendungsfall zugeschnittene Softwaretools entwickelt werden.

1.1 Problemstellung

Bei der Simulation der Dynamik von Achterbahnfahrzeugen zur anschließenden Analyse der Fahrzeug- und Tragwerkschwingungen sind neben einer genauen Modellierung der Fahrzeugkinematik weitere Voraussetzungen für das Erlangen realitätsnaher Simulationsergebnisse zu berücksichtigen. Zum einen ist für eine realistische Anregung des Fahrzeuges und den daraus resultierenden Wechselwirkungen zwischen Fahrzeug und Tragwerk die Abbildung von real vermessenen Schienengeometrien und den damit verbundenen Schienenabweichungen bei der Modellbildung unabdingbar. Hierfür sind aus der Literatur verschiedene approximierende und interpolierende Ansätze bekannt. Es gilt, diese zu analysieren und den für den entsprechenden Anwendungsfall passenden Ansatz zu wählen. Zum anderen ist ein realitätsnah parametrisierbares Rad-Schiene-Kontaktkraft- sowie Roll- bzw. Gleitreibungsmodell wesentlicher Bestandteil der Simulationsumgebung. Die Identifikation der realen Parameter des Kontakt- und Reibkraftmodells stellt hierbei jedoch eine große Herausforderung dar. Diese lassen sich in den meisten Fällen lediglich durch eine numerische Parameteridentifikation bestimmen und unterliegen deswegen verschiedenen Limitationen. Zum einen muss das Optimierungsproblem kontinuierliche Optimierungsvariablen besitzen und in der Umgebung des Optimums eine deutlich konvexe Form annehmen¹, welche mit Hilfe der resultierenden Gradienten eine möglichst stabile Konvergenz gegen das globale Minimum ermöglichen. Zum anderen muss die Simulationszeit des Modells für eine Auswertung der Kostenfunktion so kurz wie möglich gehalten werden, um eine Identifikation der Modellparameter wirtschaftlich und praktikabel durchführen zu können. Ist dies aus einem der genannten Gründe nicht möglich, muss ein neuer Ansatz zur Parametrisierung entwickelt werden.

1.2 Literaturübersicht

Eine seit Jahrhunderten erforschte Teildisziplin der Mechanik ist der Kontakt, Aufprall bzw. Aufschlag zwischen zwei Körpern. Die daraus resultierende Vielzahl an wissenschaftlichen Veröffentlichungen kann im Rahmen dieser Arbeit nicht vollständig diskutiert werden. Aus diesem Grund wird im Folgenden der Fokus auf Teilbereiche mit direktem Bezug zu der vorliegenden Arbeit gelegt.

Flores u. a. (2006a) definieren den Kontakt als Phänomen, das durch eine abrupte Änderung der das System beschreibenden Variablen dargestellt werden kann. Genauer

¹ „engl.: *well-posed optimization problem*“

ausgeführt bedeutet dies, dass ein Kontakt zwischen zwei Körpern als ein komplexes Phänomen von sehr kurzer Dauer mit sehr hohen wirkenden Kräften, rapiden Änderungen der Geschwindigkeit und daraus resultierenden abrupten Änderungen der Energie als charakterisierende Eigenschaften verstanden und dabei in zwei Phasen eingeteilt werden kann (Flores u. Ambrósio (2010)): Die Kompressions- bzw. Aufladungsphase, welche vom Moment des ersten Kontakts bis hin zur maximalen Deformation, einhergehend mit einer Differenzgeschwindigkeit von Null, andauert, gefolgt von der Expansions- bzw. Entladungsphase, welche mit der Separation beider Körper endet. Neben dieser Unterscheidung des Stoßvorgangs in physikalisch beschreibbare Phasen ist ebenfalls eine Unterscheidung hinsichtlich der möglichen Formulierung in Mehrkörpersimulation, beispielsweise Nikravesh (1988) oder Malessa (2007), möglich (Gilardi u. Sharf (2002)). Zum einen kann, unter der Annahme einer extrem kurzen Kontaktzeit, der Kontakt als Kraftstoß (Poisson u. Stern (1836)) bzw. als Anpassung der Geschwindigkeit mit Hilfe des Stoßgesetzes (Newton u. Halley (1714)) und somit als unstetiger² (Machado u. a. (2012)) Vorgang definiert werden. Hierbei wird die Integration der Bewegungsgleichungen zum Zeitpunkt des Kontakts gestoppt und nach der Anwendung des Stoßgesetzes und den daraus folgenden Anpassungen der Geschwindigkeiten der beteiligten Körper mit den neuen Anfangsbedingungen fortgeführt. Der Vorteil hierbei ist eine verkürzte Integrationszeit der Systemgleichungen (Grabner (2003)). Als Nachteil ist die aus der einfachen Beschreibung folgende limitierte Berücksichtigung von Materialeigenschaften sowie eine nicht mögliche Analyse der Kontaktkräfte zu nennen (Gonthier u. McPhee (2004)). Aufgrund der notwendigen Unterbrechung der Integration ist zudem ein geeignetes Integrationsverfahren mit passenden Schnittstellen zu wählen. Zum anderen kann der Kontakt als stetiger³, in endlicher Zeit beschreibbarer Vorgang definiert werden. Bei dieser Kategorisierung kann zwischen nicht-glatte⁴ und glatte⁵ Ansätzen unterschieden werden (Flores u. a. (2006a)). Bei dem ersten Ansatz wird die Kraft zwischen den Kontaktpartnern durch einseitige Bindungsgleichungen⁶ und somit in Form von Reaktionskräften in den Systemgleichungen berücksichtigt (Pfeiffer u. Glocker (2000)). Dies ermöglicht in Verbindung mit „engl.: *time stepping approaches*“ eindrucksvolle Rechenzeit (Tändl (2009)), resultiert aber in einem variablen System von differential-algebraischen Gleichungen. Ebenfalls können aus den abrupten Geschwindigkeitsänderungen steife Differentialgleichungen entstehen, welche zeitintensive Integrationsverfahren notwendig machen (Shampine u. Gear (1979)). Bei dem zweiten

² „engl.: *discontinuous*“

³ „engl.: *continuous*“

⁴ „engl.: *non-smooth*“

⁵ „engl.: *smooth*“

⁶ „engl.: *unilateral constraints*“

Ansatz wird durch die Nutzung von ereignisgesteuerten Integrationsverfahren (Petzold u. Hindmarsh (2005), Radhakrishnan u. Hindmarsh (1993), Grabner u. Kecskeméthy (2005)) der exakte Zeitpunkt des Kontakts bestimmt und die entstehende Kontaktkraft durch ein kontinuierliches⁷ (Lankarani u. Nikravesch (1994)) bzw. „*engl.: compliant contact force model*“ (Machado u. a. (2012)) berücksichtigt. Hierbei kann die Eindringtiefe bzw. die Verformung der Körper als Funktion der Kontaktkraft (Zhang u. Sharf (2004)) beschrieben werden. Die Nutzung solcher Modelle bringt Probleme unterschiedlicher Kategorien mit sich (Pereira u. a. (2011)). Kontaktkraftmodelle, die die resultierende Kraft in Abhängigkeit der Eindringtiefe berechnen, eliminieren diese Probleme. Die durch den Kontakt entstehende Kraft kann hierbei einfach während der laufenden Integration zu den bereits vorhandenen eingepägten Kräften addiert werden.

Aufgrund seiner einfach physikalisch interpretierbaren Eigenschaften ist das Kelvin-Voigt-Element (Parallelschaltung von linearen Feder- und Dämpferelementen (Schiehlen (1997))) ein in vielen Anwendungsbereichen genutztes Kontaktkraftmodell (Dubowsky u. Freudenstein (1971)). Trotz der weit verbreiteten Nutzung zeigt das Modell, gerade bei hohen Relativgeschwindigkeiten der Kontaktkörper, Schwächen. Zum einen resultiert aus der Umkehrung der Geschwindigkeitsrichtung während der Entladungsphase eine negative, die beiden Körper anziehende, adhäsive Kontaktkraft, welche physikalisch lediglich durch die Verwendung von Schmierstoffen erklärbar ist (Popov (2009)), zum anderen wird durch die lineare Abhängigkeit von der Geschwindigkeit ein physikalisch unrealistisch hoher Sprung der Kontaktkraft im Moment des Kontakts sowie eine physikalisch nicht sinnvolle gleichmäßige Energiedissipation während beider Kontaktphasen erzeugt (Machado u. a. (2012)). Aus diesem Grund wurde von Hunt u. Crossley (1975) ein komplexeres Kontaktkraftmodell entwickelt, welches ein nichtlineares Feder- (Hertz (1881)) und Hysterese-Dämpferelement kombiniert und somit eine physikalisch sinnvollere Energiedissipation ermöglicht. In den folgenden Jahren wurde dieses Modell von vielen Wissenschaftlern erweitert bzw. auf den vorliegenden Anwendungsfall angepasst. So wurde beispielsweise von Lee u. Wang (1983) das Hunt-Crossley Modell so modifiziert, dass die aus der Hystereseschleife resultierende maximale Dämpfung mit der maximalen Eindringtiefe zusammenfällt. Lankarani u. Nikravesch (1990) bestimmten den Hysterese-Dämpfungsfaktor, indem sie den Verlust der kinetischen Energie in das Verhältnis zur dissipierten Energie aufgrund interner Dämpfung setzten, und formten daraus einen der meist genutzten Ansätze in der Simulation von Kontakten. Hieraus folgten Erweiterungen für Kontakte mit großen Kontaktflächen (Gonthier u. McPhee (2004)) bzw. zwischen Körpern mit sehr unterschiedlichen Steifigkeiten (Flores u. a. (2011)). Der Nachteil aller dargestellten Modelle ist, dass die Modellpara-

⁷ „*engl.: continuous*“

meter oft schwer zu bestimmen sind (Flores u. Ambrósio (2010)). Aufgrund komplexer Materialeigenschaften der Kontaktkörper ist der Hysterese-Dämpfungsfaktor und die daraus resultierende Energiedissipation selbst durch eine Parameteridentifikation mit Hilfe von realen Messwerten nur unzureichend zu bestimmen (Flores u. a. (2011)). Eine experimentelle Bestimmung der Parameter und die daraus resultierende Verifikation wird in der Literatur selten behandelt (Zhang u. Sharf (2009)). Aus diesem Grund untersuchten Zhang und Sharf mit Hilfe einer Hochgeschwindigkeitskamera verschiedene einfache Modelle (Pendel, Springender Ball). Für langsame Kontaktvorgänge bis $0.8 \frac{m}{s}$ sowie für Stöße mit geringer Energiedissipation (Stoßzahl größer 0.9) konnte eine gute Übereinstimmung zwischen Modell und Messung erzielt werden. Die von Boos u. McPhee (2010) mit Hilfe eines Kraftsensors durchgeführten Versuche für den Kontakt zwischen einem Zylinder und einer Ebene konnten dazu genutzt werden, Steifigkeiten für Elastomere und Aluminium zu verifizieren.

Die gezeigten kontinuierlichen Kontaktkraftmodelle werden in verschiedene wissenschaftlichen Bereichen zur Simulation von Kontakten eingesetzt. Beispielsweise nutzen Guess u. a. (2010) das Hunt-Crossley Modell für die Abbildung des Kontakts zwischen Oberschenkelknochen (Femur), Schienbein (Tibia) und Meniskus in einem 3D-Knie-Modell bzw. Ferreira u. a. (2013) sowie Millard u. Kecskeméthy (2015) für den Fußkontakt bei der menschlichen Gehbewegung. Ein technischer Anwendungsfall, dargestellt von Flores u. a. (2006b), zeigt die Verwendung zur Modellierung von Spiel in rotationssymmetrischen Gelenken. Diolaiti u. a. (2005) nutzen die Beschreibung zur Modellierung des Kontakts eines Roboters mit beliebigen Gegenständen innerhalb des Arbeitsraumes. In Verbindung mit flexiblen Körpern nutzen Khulief u. Shabana (1987) kontinuierliche Kontaktkraftmodelle und ereignisgesteuerte Integration zur Verifizierung von Simulationsergebnissen (Khulief u. Shabana (1986)).

Ein weiterer in der Literatur viel diskutierter Anwendungsbereich ist der für die Simulation von Schienenfahrzeugen notwendige Kontakt zwischen Rad und Schiene. Als Sonderfall des allgemeinen Kontakts zwischen zwei Körpern ist dieser ähnlich kategorisierbar. Bei der Simulation von Schienenfahrzeugen kann grundsätzlich zwischen zwei Ansätzen unterschieden werden. Zum einen kann das Schienenfahrzeug durch ein Gelenk entlang einer Raumkurve geführt werden (Hartmann (2002)). Tändl (2009) entwickelte basierend auf diesem Ansatz ein „engl.: *Curve-Joint*“, welches sich tangential entlang einer glatten Raumkurve verschieben lässt. Das hieraus folgende, beliebig erweiterbare Achterbahnfahrzeugmodell zeigt in der Verifizierung mit realen Messwerten sehr gute Übereinstimmungen. Die notwendige Rechenzeit ist ebenfalls beeindruckend. Arnold u. Netter (1998) nutzen ebenfalls eine zweiseitige Bindung zur Simulation einer Achse eines Schienenfahrzeuges. Das Modell berücksichtigt jedoch das genaue Profil

der Schienen sowie der Räder durch die Approximation mit einem Spline. Die aus der Approximation folgenden geglätteten Profile ermöglichen eine numerisch stabilere Differenzierung der Bindungsgleichungen (Arnold (1994)). Die entstehenden Kontakt- sowie Reibkräfte können dann durch die Multiplikation von Jacobimatrix und Lagrange'schen Multiplikatoren bestimmt werden. Nachteil ist, dass aufgrund der Bindungsgleichungen keine Relativbewegungen zwischen Fahrzeug und Schiene erlaubt ist. Aus diesem Grund wird bei dem zweiten Ansatz das Fahrzeug nicht durch zweiseitige Bindungen sondern durch Kraftelemente, die zwischen Rad und Schiene wirken, auf der Bahn gehalten. Die in dieser Arbeit entwickelte Methode von Malessa u. Kecskeméthy (2012a) nutzt beispielsweise einen so genannten „*engl.: traveling cylinder approach*“ bei dem die Schiene durch einen Zylinder an einem die linke bzw. rechte Schiene repräsentierenden Spline dargestellt wird. Der Schienenzylinder wird durch eine parallel zu den Systemgleichungen integrierte Differentialgleichung erster Ordnung (Shabana u. a. (2004)) so auf einem Spline positioniert, dass sich ein rechter Winkel zwischen Kurventangente und Differenzvektor sowie zwischen Rad und Schienenzylinder einstellt. Dies garantiert einen stets gut positionierten Schienenzylinder und resultiert in einem Zylinder-Spline-Kontaktkraftelement. Shabana u. a. (2004) beschreiben im Gegensatz zu Arnold und Netter das Profil von Rad und Schiene durch einen interpolierenden Spline. Die Profile werden hierbei durch Funktionen beschrieben, die von vier Parametern abhängen. Die Kontaktpunkte zwischen den beiden Profilen werden durch den minimalen Abstand zwischen zwei parametrisierten Flächen, welche aus den Profildfunktionen folgen, bestimmt (Shabana u. Sany (2001)). Ein großer Nachteil in der Simulation von Schienenfahrzeugen mit den vorgestellten Methoden ist, dass die Schienenabweichungen nicht berücksichtigt werden. Diese können durch Fertigungsfehler, Abnutzung, Änderung der Umgebungseigenschaften wie Temperatur oder Luftfeuchtigkeit sowie durch Veränderung des Tragwerks entstehen. Die Abbildung dieser Abweichungen ist essentiell für die realitätsnahe Modellierung und Simulation der Kontaktkräfte und die daraus resultierende Analyse von Fahrzeugschwingungen (Pombo u. Ambrósio (2012)).

Um Schienenabweichungen berücksichtigen zu können, sind aus der Literatur grundsätzlich zwei Methoden bekannt. Basierend auf den im realen System vorkommenden Amplituden und Frequenzen wird bei der stochastischen Methode ein zufälliges Signal im Frequenzbereich erzeugt. Dieses wird dann durch eine Fourier-Synthese in den Zeitbereich transformiert und in der Modellierung durch ein Kraftelement berücksichtigt. Das durch die Fourier-Synthese entstandene Signal stellt zwar nicht die reale Abweichung dar, sorgt aber für eine statistisch identische Anregung des Modells (Pombo u. Ambrósio (2012)). Bei der zweiten Methode werden real vermessene Abweichungen direkt durch die Nutzung von Splines, in der Simulation berücksichtigt. Pombo u.

Ambrósio (2012) beschreiben die vermessenen Abweichungen beispielsweise ausgehend von einer „engl.: *Track Centerline*“ (Pombo u. Ambrósio (2003)). Diese kann durch Akima-, Shape-Preserving- und kubische Splines in Verbindung mit einem Frenet-Koordinatensystem dargestellt werden und legt die grundsätzliche Bahngeometrie fest. Im Abstand von 25 cm werden dann neue Stützstellen, basierend auf dem Ortsvektor des Koordinatensystems und den Schienenabweichungen, festgelegt. Diese werden dann wiederum durch Akima-, Shape-Preserving- und kubische Splines interpoliert. Die Tangenten und Krümmungen der so entstehenden Schienensplines werden dann in Abhängigkeit der Bahnkoordinate in einer Tabelle gespeichert. Unter Berücksichtigung des Schienen- und Radprofils (vgl. Shabana u. a. (2004)) kann dann mit den in der Tabelle hinterlegten Tangenten die Kontaktkraft zwischen Rad und Schiene mit Hilfe eines kontinuierlichen Kontaktmodells (Hunt u. Crossley (1975)) berechnet werden (Pombo u. Ambrósio (2005)). Vorteil dieser Methode ist die einmalige Offline-Erstellung der Tabelle und die daraus resultierende gute Performance der Simulation. Die gezeigte Methode wurde anschließend zur Simulation eines Passagierwaggons der Lissaboner Metro (Pombo u. a. (2007)) sowie eines Achterbahnfahrzeuges (Pombo u. Ambrósio (2007)) genutzt und mit realen Messwerten verifiziert. Im Gegensatz zur vorgestellten Offline-Methode nutzen Malessa u. Kecskeméthy (2013) verschiedene Methoden zur Online-Interpolation bzw. Approximation von Schienenabweichungen mit Hilfe von Dierckx-Splines. Hierbei zeigte sich, dass durch die Approximation der Abweichungen die Schienenwelligkeit herausgefiltert, die relevanten Abweichungen jedoch berücksichtigt werden konnten. Die Qualität der Simulationsergebnisse konnte anschließend durch Verifikation mit realen Beschleunigungsmessungen bestätigt werden.

1.3 Inhalt und Ziel der vorliegenden Arbeit

Das Ziel der vorliegenden Arbeit kann zur genaueren Abgrenzung in zwei Teilbereiche gegliedert werden. Der erste Teil befasst sich mit der Analyse von Modellierungsmethoden zur Abbildung von vermessenen Schienengeometrien. Hierzu werden verschiedene interpolierende und approximierende Methoden untersucht. Ziel ist hierbei die Abbildung von Schienenabweichungen in der genutzten Simulationsumgebung MÜBILE zur realitätsnahen Anregung des Fahrzeugmodells über das genutzte Rad-Schiene-Kontaktkraftmodell. Um das Kontaktkraftmodell zu parametrisieren, hat der zweite Teil die Entwicklung einer alternativen Vorgehensweise zur Identifikation von Modellparametern ohne die Nutzung herkömmlicher numerischer Optimierung zum Ziel. Hierzu wird durch die Analyse der Systemantwort bei Anregung durch eine Kraft

in Abhängigkeit der Position und durch die Definition verschieden gewichtbarer Qualitätsmetriken im Zeit- und Frequenzbereich ein semi-automatisches Parameteridentifikationskonzept entwickelt. Ziel ist hierbei die Identifikation von Modellparametern, durch die die Simulationsergebnisse sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich eine verbesserte Übereinstimmung mit realen Messwerten zeigen. Die vorliegende Arbeit ist hierzu wie folgt gegliedert:

Kapitel 2 zeigt Methoden zur Modellierung von Schienen und Schienenabweichungen mit Hilfe von Splines. Hierzu werden zunächst die Grundlagen und Eigenschaften räumlicher Kurven sowie die Darstellung von sich entlang der Kurven bewegenden Koordinatensystemen diskutiert. Im Anschluss daran werden die in der vorliegenden Arbeit genutzten Dierckx- und Shape-Preserving-Splines im Detail vorgestellt. Hieraus werden mögliche Modellierungen von Schienenabweichungen abgeleitet. Das Kapitel schließt mit Ansätzen zur Analyse der modellierten Schienengeometrien. Kapitel 3 befasst sich mit der Modellbildung des in der vorliegenden Arbeit genutzten Achterbahn- und Schienenmodells. Hierbei liegt im ersten Teil der Fokus zunächst auf allgemeinen Methoden zur Modellierung von Mehrkörpersystemen und schließt mit einer Einführung in die genutzte Programmbibliothek MŮBILE. Im Anschluss daran zeigt das Kapitel die genutzten Ansätze zur Modellierung des Rad-Schiene-Kontakts sowie der Modellierung von Roll- und Gleitreibung. Als Weiterentwicklung dieser Modelle wird das genutzte Fahrzeugmodell beginnend mit einer einfachen Fahrzeugachse sukzessive bis hin zu einem vollständigen Modell mit gekoppelten Fahrzeugen erweitert. Die hierfür notwendigen kinetostatischen Grundobjekte werden im Anschluss gezeigt. Das Kapitel schließt mit einer numerischen Untersuchung zur Wahl eines geeigneten Integrationsverfahrens. Kapitel 4 zeigt zunächst Methoden zur Bewertung und Analyse von Schwingungen. Im Anschluss daran werden die verschiedenen Methoden zur Interpolation und Approximation von Schienenabweichungen mit Hilfe von Fahrzeugsimulationen detailliert betrachtet und mit Hilfe von realen Messwerten verifiziert. Kapitel 5 zeigt ein semi-automatisches Identifikationskonzept zur Bestimmung der Modellparameter. Hierzu wird der Einfluss der Parameter auf das Gesamtsystem durch die Analyse der Systemantwort untersucht. Aus den gewonnenen Erkenntnissen wird eine Ablaufreihenfolge für die Parameteridentifikation abgeleitet. Die Wirksamkeit der Methode wird unter Verwendung verschieden gewichteter Qualitätsmetriken geprüft. Kapitel 6 fasst die Kernpunkte der vorliegenden Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick für mögliche, an diese Arbeit anknüpfende Arbeitsrichtungen.

2 Modellierung von Schienengeometrien und Schienenabweichungen mit Hilfe von Splines

Kapitel 2 zeigt die Grundlagen der Modellierung von Schienengeometrien mit Hilfe von Splines. Notwendige Eigenschaften räumlicher Kurven, die die Basis für die Definition verschiedener Koordinatensysteme bilden, werden im ersten Abschnitt dargestellt. Abschnitt zwei zeigt im Anschluss verschiedene Verfahren zur Interpolation bzw. Approximation von Messpunkten. Die vorliegende Arbeit orientiert sich hierbei an den Ausführungen von Tändl (2009) sowie Geu Flores (2013).

2.1 Grundlagen räumlicher Kurven

Der folgende Abschnitt zeigt grundlegende Eigenschaften räumlicher Kurven. Zur Parametrisierung der Kurve wird die Bogenlänge s der Trajektorie eingeführt. Für die Beschreibung der Orientierung der Kurve in Abhängigkeit von s werden verschiedene Darstellungsformen von Koordinatensystemen betrachtet.

2.1.1 Eigenschaften räumlicher Kurven

Eine parametrisierte räumliche Kurve kann als unendlich oft differenzierbare Abbildung der Form $\underline{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ dargestellt werden. Hierbei ist $D \subset \mathbb{R}$ ein über den Kurvenparameter u offenes ($D =]u_s \ u_e[$), geschlossenes ($D = [u_s \ u_e]$) oder halbgeschlossenes

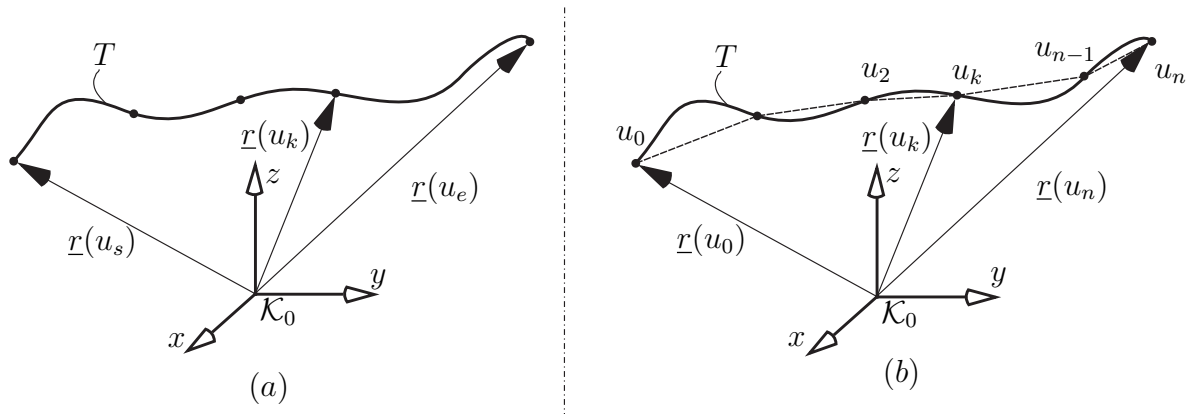


Abbildung 2.1: Darstellung einer Trajektorie T durch eine parametrisierte Kurve (a) - Darstellung eines Polygonzuges zur Ermittlung der Bogenlänge s (b)

($D =]u_s \ u_e]$, $D = [u_s \ u_e]$) Intervall¹. Hieraus folgen für jeden Kurvenparameter $u_k \in D$ die drei Koordinaten $r_x(u_k)$, $r_y(u_k)$ und $r_z(u_k)$ im euklidischen Raum. Die hieraus folgende und in Abbildung 2.1 (a) dargestellte Abbildung $\underline{r}(D)$ kann dann als Trajektorie T bezeichnet werden (do Carmo (1993)). Die so beschriebene Kurve heißt regulär, wenn für die zeitliche Ableitung des Kurvenpunkts $\dot{\underline{r}}(u_k) \neq \underline{0}$ für alle $u_k \in D$ gilt (Bär (2010)). Zusätzlich besitzt die Kurve C^n -Kontinuität, wenn $\underline{r}(u)$ n mal stetig differenzierbar, das heißt $\frac{\partial^n \underline{r}(u)}{\partial t^n} \neq \underline{0}$ ist. Der in der Literatur (beispielsweise Mortenson (2006)) ebenfalls genutzte Begriff der G^n -Kontinuität beschreibt hierbei eine abgeschwächte Form der C^n -Kontinuität. Während bei der C -Kontinuität an jeden Punkt der Trajektorien sowohl die Richtung als auch der Betrag der Ableitung kontinuierlich sein muss, ist bei der G -Kontinuität lediglich die Kontinuität des Richtungsvektors notwendig. Die vollständige Bogenlänge s_K der Kurve kann über die in Abbildung 2.1 (b) dargestellten Verbindungslinien des Polygonzuges, welcher durch einen Tupel der Form $T = (\underline{r}_0, \dots, \underline{r}_n)$ mit den Vektoren $\underline{r}_k \in \mathbb{R}^n$ so dass $\underline{r}_{k+1} \neq \underline{r}_k$ mit $i = 1, \dots, n$ beschrieben ist (Bär (2010)), durch

$$s_K(T) = \sum_{k=1}^n \|\underline{r}(u_k) - \underline{r}(u_{k-1})\| \quad (2.1)$$

angenähert werden. Unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung sowie $\|T\| \rightarrow 0$ folgt für die Bogenlänge

$$s_K(\underline{r}) = \int_{u_0}^{u_n} \left\| \frac{d\underline{r}(\xi)}{du} \right\| d\xi \quad (2.2)$$

bzw. der Zusammenhang zwischen Bogenlänge s und Kurvenparameter u :

$$\frac{ds}{du} = \left\| \frac{d\underline{r}(u)}{du} \right\|. \quad (2.3)$$

2.1.2 Parametrisierung von räumlichen Kurven nach der Bogenlänge

Eine räumliche Kurve wird anhand einer intrinsischen Eigenschaft beschrieben. Aufgrund einer beliebigen Trajektorie der Kurve im Raum ist in vielen Fällen eine Beschreibung durch einen von einer Koordinatenachse abhängigen Wert, beispielsweise $r_y = f(r_x) \wedge r_z = f(r_x)$, nicht zulässig, da einem Wert von r_x ggf. nicht ein einzelner eindeutiger Punkt r_y bzw. r_z zugeordnet werden kann. So ist eine mögliche Parame-

¹In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich räumliche Kurven im \mathbb{R}^3 in einem geschlossenen Intervall $D = [u_s \ u_e]$ betrachtet.

trisierung der Kurve eine Zuordnung $r_{x,y,z} = r_{x,y,z}(t)$ mit Bezug auf die Zeit t , welche physikalisch als Bewegung einer Masse entlang der Trajektorie T betrachtet werden kann (Mortenson (2006)). Eine weitere Möglichkeit ist die Parametrisierung nach der Bogenlänge s mit dem Intervall $D = [s_s \ s_e]$ (Geu Flores (2013)). Der Ortsvektor $\underline{r}(u)$ wird hierbei durch eine Parametertransformation der Form $s = u(s)$ mit einer notwendigerweise umkehrbaren Funktion $u(s)$, in $\underline{r}(s)$ umgewandelt. Im Umkehrschluss spricht man von einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve, wenn

$$\left\| \frac{d \underline{r}(s)}{ds} \right\| = 1 \quad (2.4)$$

gilt. Hieraus resultiert eine konstante Geschwindigkeit entlang der Trajektorie T , die dafür sorgt, dass die Kurve nicht aus lediglich einem einzigen Punkt besteht (Bär (2010)).

2.2 Darstellungsformen von Koordinatensystemen

Wie zuvor gezeigt, kann eine parametrisierte räumliche Kurve bzw. eine Trajektorie in Abhängigkeit der Bogenlänge durch einen Ortsvektor $\underline{r}(s)$ dargestellt werden. Die Spitze des Ortsvektors beschreibt hierbei den Ursprung eines Koordinatensystems. Für die Achsen und die damit einhergehende Orientierung des Koordinatensystems sind verschiedene Definitionen gängig. Beispielsweise bietet das FRENET²-Koordinatensystem eine intuitive, mathematisch einfach interpretierbare Darstellung, welche jedoch auf Trajektorien mit geradem Verlauf zu Problemen führt. Für beliebige Trajektorien ohne Beschränkungen bietet sich die im Anschluss präsentierte Darstellung mit Hilfe eines DARBOUX-Koordinatensystems an.

2.2.1 Frenet-Koordinatensystem

Eine mathematisch einfach interpretierbare Definition der ersten Koordinatenachse folgt aus der Ableitung des Ortsvektors $\underline{r}(s)$ nach der Bogenlänge und beschreibt damit die Tangente $\underline{t}(s)$ bzw. die Änderung der allgemeinen Kurve über s durch

$$\underline{t}(s) = \frac{\underline{\tilde{t}}(s)}{\|\underline{\tilde{t}}(s)\|} \quad \text{mit} \quad \underline{\tilde{t}}(s) = \underline{r}'(s) = \frac{d \underline{r}(s)}{ds}. \quad (2.5)$$

²Es wird darauf hingewiesen, dass in der vorliegenden Arbeit alle Eigennamen bei Erstnutzung gesondert hervorgehoben werden. Bei weiterer Nutzung werden diese dann in normaler Schriftart dargestellt.

Nach Gleichung 2.4 folgt für eine nach der Bogenlänge s parametrisierten Kurve automatisch $\|\underline{\tilde{t}}(s)\| = \|\underline{t}(s)\| = 1$. Durch erneute Differenzierung folgt der um 90 Grad im Uhrzeigersinn gedrehte Vektor

$$\underline{n}(s) = \frac{\underline{\tilde{n}}(s)}{\|\underline{\tilde{n}}(s)\|} \quad \text{mit} \quad \underline{\tilde{n}}(s) = \underline{t}'(s) = \underline{r}''(s) = \frac{d^2 \underline{r}(s)}{ds^2}. \quad (2.6)$$

Es zeigt sich, dass $\underline{r}''(s)$ ein Vielfaches des Normalvektors $\underline{n}(s)$ ist und durch

$$\underline{r}''(s) = \kappa(s) \underline{n}(s) \quad (2.7)$$

beschrieben werden kann. $\kappa(s)$ wird hierbei als Krümmung der Kurve bezeichnet. Die Krümmung ist ein Maß für die Änderung der Tangente bzw. die Abweichung der Kurve von einer Geraden und beschreibt somit, wie sehr sich der Geschwindigkeitsvektor in Richtung des Normalenvektors verändert (Bär (2010)). Eine geometrische Interpretation der Krümmung bietet der in Abbildung 2.2 dargestellte Krümmungsradius ρ . Dieser Kehrwert der Krümmung beschreibt den Radius eines Kreises, den die Trajektorie bei konstantem κ beschreiben würde. Zur Vervollständigung der Orthonormalbasis im \mathbb{R}^3 wird der Binormalenvektor

$$\underline{b}(s) = \underline{t}(s) \times \underline{n}(s), \quad (2.8)$$

genutzt. Aufgrund der Eigenschaften von $\underline{t}(s)$ und $\underline{n}(s)$ resultiert dieser automatisch als Einheitsvektor. Das so entstehende Koordinatensystem \mathcal{K}_f heißt Frenet-Koordinaten-

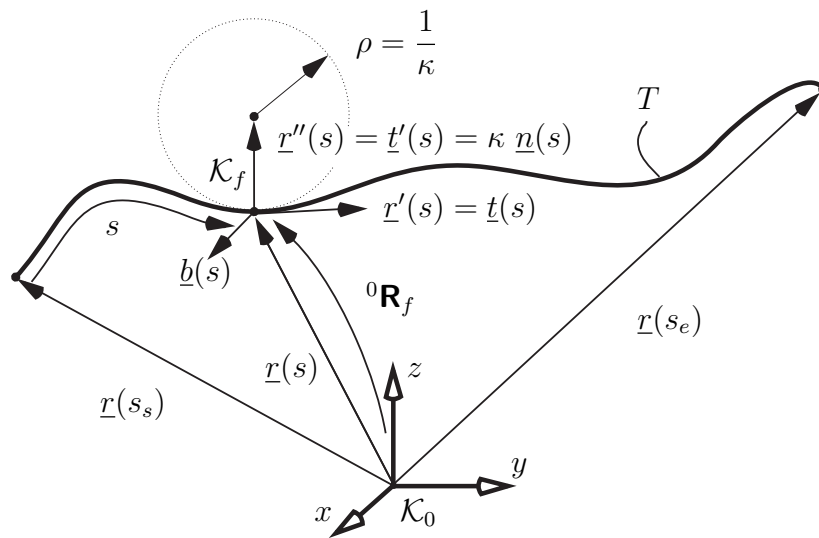


Abbildung 2.2: Frenet-Koordinatensystem auf räumlicher Kurve

system. Die Orientierung relativ zu \mathcal{K}_0 kann durch die Rotationsmatrix

$${}^0\mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} \underline{t}(s) & \underline{n}(s) & \underline{b}(s) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

beschrieben werden. Ähnlich zu Gleichung 2.7 kann durch erneute Differenzierung von Gleichung 2.8

$$\frac{d \underline{b}(s)}{ds} = \underline{b}'(s) = -\tau(s) \underline{n}(s) \quad (2.10)$$

die Torsion $\tau(s)$, welche die Änderungsrate des Binormalenvektors bzgl. des Normalenvektors und somit die Verdrehung aus der Normalebene angibt (Tändl (2009)), bestimmt werden. Aus Gleichungen 2.5, 2.6 und 2.8 können durch Differenzierung nach der Bogenlänge die bekannten FRENET-SERRET Gleichungen abgeleitet werden: Die detaillierte Betrachtung dieser Gleichung liegt außerhalb des Fokus der vorliegenden Arbeit. Als historischer Hinweis sei auf Frenet (1852) bzw. Serret (1868) verwiesen.

2.2.2 Darboux-Koordinatensystem

Die Orientierung an einem beliebigen Punkt einer Kurve kann mit Hilfe des vorgestellten Frenet-Koordinatensystems einfach und geometrisch interpretierbar dargestellt werden. Für Trajektorien mit geradem Verlauf folgt jedoch für den Krümmungsradius $\rho \rightarrow \infty$. Somit ist nach Gleichung 2.7 kein Normalenvektor $\underline{n}(s)$ bzw. kein Binormalenvektor $\underline{b}(s)$ bestimmbar. Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Arbeit die Orientierung mit Hilfe eines Darboux-Koordinatensystems beschrieben. Identisch zum Frenet-Koordinatensystem liefert die Ableitung des Ortsvektors $\underline{r}'(s) = \underline{t}(s)$ (vgl. Gleichung 2.7).

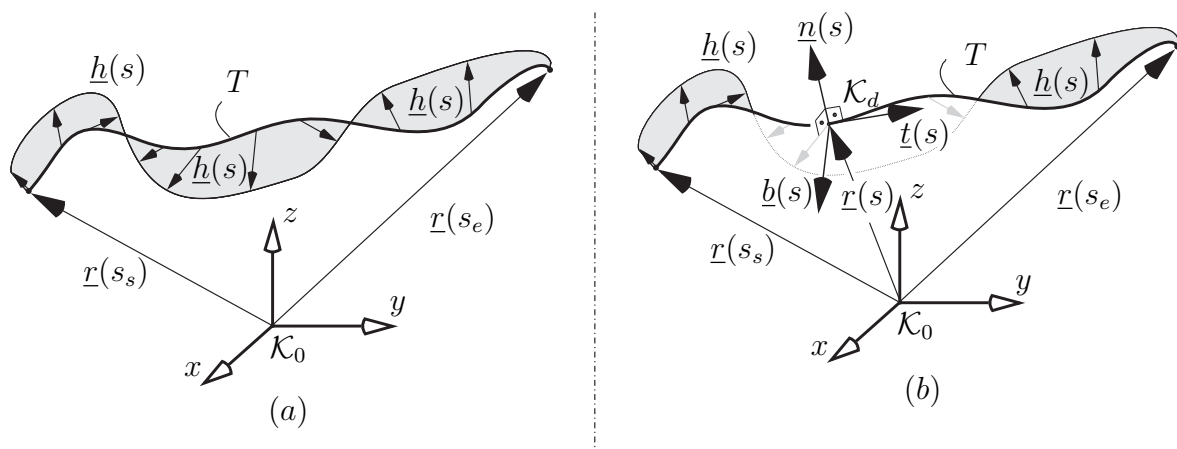


Abbildung 2.3: Vektorfeld $\underline{h}(s)$ an räumlicher Kurve (a) - Darboux-Koordinatensystem auf räumlicher Kurve (b)

chung 2.5) die Tangente bzw. die erste Achse des Koordinatensystems der räumlichen Kurve. Um für die zweite Koordinatenachse eine Unabhängigkeit von der Krümmung zu erreichen, wird, wie in Abbildung 2.3 (a) gezeigt, ein Vektorfeld $\underline{h}(s)$ entlang der Raumkurve definiert. Der Normalenvektor³ $\underline{n}(s)$ kann dann durch das normierte Kreuzprodukt

$$\underline{n}(s) = \underline{h}(s) \times \underline{t}(s), \quad \underline{n}(s) = \frac{\underline{\tilde{n}}(s)}{\|\underline{\tilde{n}}(s)\|} \quad (2.11)$$

bestimmt werden. Schlussendlich folgt der Binormalenvektor für die in Abbildung 2.3 (b) dargestellte Orthonormalbasis \mathcal{K}_d durch

$$\underline{b}(s) = \underline{t}(s) \times \underline{n}(s). \quad (2.12)$$

Somit kann durch das von der Bogenlänge s abhängige Vektorfeld $\underline{h}(s)$ eine von der Bahngeometrie unabhängige Orientierung des Darboux-Koordinatensystems erreicht werden. Lediglich für den Fall eines zum Tangentenvektors $\underline{t}(s)$ parallelen Vektorfelds ist eine Berechnung des Normalenvektors nicht möglich. Aus diesem Grund wird das Vektorfeld $\underline{h}(s)$ so definiert, dass der Winkel zwischen $\underline{h}(s)$ und $\underline{t}(s)$ einen gewissen Schwellwert nicht unterschreitet (Geu Flores (2013)). Mit den Vektoren aus Gleichung 2.5, 2.11 und 2.12 kann die Orientierung relativ zu \mathcal{K}_0 wieder durch

$${}^0\mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} \underline{t}(s) & \underline{n}(s) & \underline{b}(s) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

angegeben werden. Durch die stabile Definition der Orientierung des Koordinatensystems in Abhängigkeit von $\underline{h}(s)$ bietet sich das Darboux-Koordinatensystem für viele unterschiedliche Anwendungsgebiete an. Aufgrund der im Vergleich zum Frenet-Koordinatensystem höheren Anzahl an notwendigen mathematischen Operationen ist das Darboux-Koordinatensystem jedoch nicht zwangsweise die beste Wahl. Ein detaillierter Vergleich der Rechenzeiten und der Anzahl der mathematischen Operationen in Tändl (2009) zeigt, dass durch die Nutzung eines Frenet bzw. eines Darboux-Koordinatensystems mit konstantem $\underline{h}(s)$ selbst in einfachen Anwendungen 30% Rechenzeit im Gegensatz zu einem Darboux-Koordinatensystem mit variablem $\underline{h}(s)$ eingespart werden kann. Da aufgrund des Anwendungsfalles in der vorliegenden Arbeit lediglich der Tangentenvektor für die Abstandsberechnung zwischen Rad und Schiene benötigt wird, ist die Orientierung des Koordinatensystem zweitrangig. Aus diesem Grund wird im Folgenden ein Darboux-Koordinatensystem mit konstantem $\underline{h}(s)$ relativ zum Inertialsystem \mathcal{K}_0 genutzt. Als historischer Hinweis sei auf Darboux (1889) verwiesen.

³Hier kein Normalenvektor im Sinne von Gleichung 2.7 mehr.

2.3 Interpolation und Approximation von Messpunkten mit räumlichen Kurven

Der folgende Abschnitt zeigt unterschiedliche Methoden zur Modellierung von räumlichen Kurven. Hierzu werden zunächst BÉZIER-Kurven, also Sonderformen der Basis-Splines betrachtet. Im Anschluss daran werden die zur Modellierung von Schienenabweichungen genutzten DIERCKX-Splines im Detail erläutert. Der Abschnitt schließt mit einer Betrachtung von Formerhaltenden-Splines⁴, die zum Vergleich ebenfalls zur Modellierung von Schienenabweichungen genutzt werden.

2.3.1 Bezier-Kurven

Wie in den vorherigen Abschnitten gezeigt, kann eine Kurve durch einen von einem Kurvenparameter abhängigen Ortsvektor der Form

$$\underline{r}(u) = \begin{bmatrix} x(u) & y(u) & z(u) \end{bmatrix}^T \quad (2.14)$$

beschrieben werden. Hierbei können die Funktionen $x(u)$, $y(u)$ und $z(u)$ entweder durch Polynome n -ten Grades (Hermite-Kurven) oder verschiedene spezielle Basisfunktionen dargestellt werden (Mortenson (2006)). Grundsätzlich kann jeder Punkt der parametrisierten Kurve durch

$$\underline{r}(u) = \sum_{i=0}^n \underline{c}_i B_{i,n}(u) \quad u \in [0, 1] \quad (2.15)$$

beschrieben werden. Hierbei stellt \underline{c}_i einen Vektor eines von $n + 1$ Eckpunkten eines charakteristischen Polygons und $B_{i,n}$ die Basisfunktionen dar. Für Bezier-Kurven gilt:

1. Die Funktion interpoliert den ersten (\underline{c}_0) und letzten (\underline{c}_i) Eckpunkt,
2. Die Anfangs- und Endtangente $\underline{r}'(u)$ wird durch die ersten ($\underline{c}_0, \underline{c}_1$) und letzten beiden Punkte ($\underline{c}_{i-1}, \underline{c}_i$) bestimmt,
3. Die n -te Ableitung $\underline{r}^n(u)$ hängt von $n + 1$ Eckpunkten am Anfang und Ende der Kurve ab und ist somit die Verallgemeinerung der zweiten Ableitung
4. $f_i(u)$ ist symmetrisch zu u und $u - 1$ und erlaubt somit eine Umkehrung der Eckpunkte ohne Änderung der Kurve

⁴Im Folgenden: „engl.: *Shape-Preserving-Splines*“

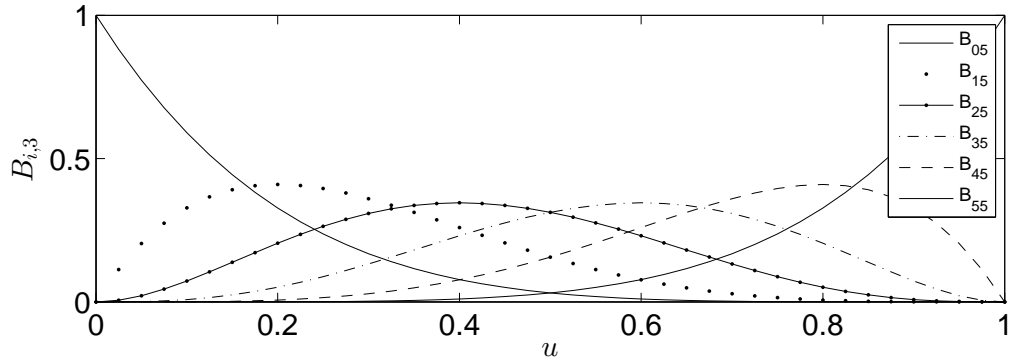


Abbildung 2.4: Bezier-Basisfunktionen ($n = 5$)

Die dargestellten Eigenschaften werden durch BERNSTEIN-Polynome mit den Basisfunktionen

$$B_{i,n}(u) = \frac{n!}{i! (n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \quad (2.16)$$

beschrieben. Gleichung 2.17 zeigt exemplarisch die Basisfunktionen für einen Vektor mit 6 Eckpunkten ($n = 5$). Hierbei ist zu erkennen, dass der maximale Grad der Basisfunktionen identisch zu der Anzahl der n Verbindungslinien des charakteristischen Polynoms ist.

$$\begin{aligned} B_{05} &= (1-u)^5 \\ B_{15} &= 5u(1-u)^4 \\ B_{25} &= 10u^2(1-u)^3 \\ B_{35} &= 10u^3(1-u)^2 \\ B_{45} &= 5u^4(1-u) \\ B_{55} &= u^5 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Abbildung 2.4 zeigt die in Gleichung 2.17 beschriebenen Basisfunktionen in Abhängigkeit des Kurvenparameters u . Hierbei ist die Verschiebung des Einflussbereiches der verschiedenen Basisfunktionen deutlich zu erkennen. Während Basisfunktionen mit im Verhältnis zu n kleinem i eher den vorderen Teil des Intervalls beeinflussen, wirken sich Basisfunktionen mit verhältnismäßig großem i eher auf den hinteren Teil aus. Aus Gleichung 2.15 und 2.17 folgt, dass eine beliebige Kurve mit 6 Eckpunkten durch

$$\underline{r}(u) = B_{05} \underline{c}_0 + B_{15} \underline{c}_1 + B_{25} \underline{c}_2 + B_{35} \underline{c}_3 + B_{45} \underline{c}_4 + B_{55} \underline{c}_5 \quad u \in [0, 1] \quad (2.18)$$

dargestellt werden kann. Basierend auf den in Tabelle 2.1 gezeigten Eckpunkten zeigt Abbildung 2.5 (a) die resultierenden Bezier-Kurven \underline{r}_1 für \underline{c}_1 und \underline{r}_2 für \underline{c}'_1 . Durch die in Abbildung 2.1 (b) dargestellte Differenz der beiden Kurven wird ersichtlich, dass sich die Verschiebung eines einzelnen Punktes auf den Verlauf der gesamten Kurve

c_{x0}	c_{y0}	c_{x1}	c_{y1}	c'_{x1}	c'_{y1}	c_{x2}	c_{y2}	c_{x3}	c_{y3}	c_{x4}	c_{y4}	c_{x5}	c_{y5}
0	3.4	1.1	4.75	0.5	6.1	4.2	5	6.15	0.6	8.8	0	10	0.8

Tabelle 2.1: Beispieleckpunkte eines Polygons

auswirkt. Ebenfalls zeigt sich, dass weder eine Tangente bzw. Krümmung noch die Torsion festgelegt werden muss. Sämtliche Eigenschaften der Bezier-Kurve folgen aus den Basisfunktionen $B_{i,n}$ sowie den gewählten Eckpunkten \underline{c}_0 bis \underline{c}_5 des Polygons.

Die gezeigten Bezier-Kurven eignen sich grundsätzlich, um beliebige Kurven mit Hilfe von Eckpunkten eines Polygons im \mathbb{R}^3 zu beschreiben. Von Nachteil ist hierbei die direkte Abhängigkeit des Grades der genutzten Basisfunktion von der Anzahl der Eckpunkte des Polygons. Diese führt bei einer Vielzahl von Eckpunkten zu hochgradigen Polynomen und somit zu einem unverhältnismäßig hohen Rechenaufwand bei der Auswertung der Kurve. Die aus der Änderung eines Eckpunktes resultierende Anpassung der gesamten Kurvenform ist ebenfalls eine unerwünschte Eigenschaft der Kurve. Des Weiteren bietet die Beschreibung grundsätzlich keine Möglichkeit, Einfluss auf die Tangente und Krümmungen zu nehmen.

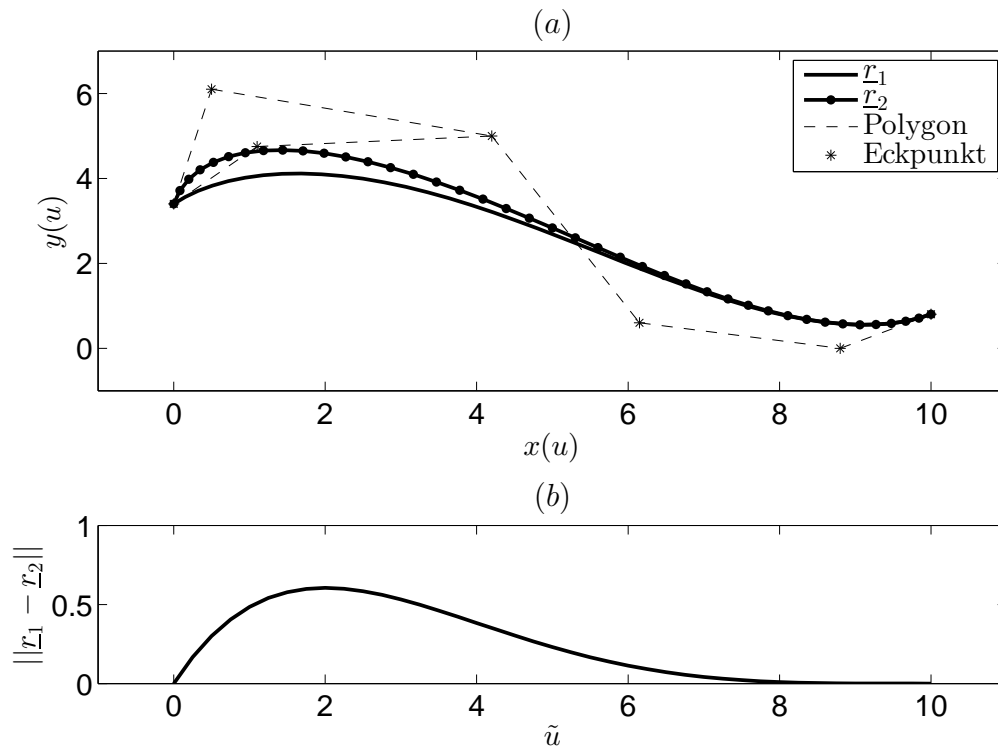


Abbildung 2.5: Vergleich: Bezier-Kurven mit Ortsvektor \underline{r}_1 und \underline{r}_2 ($n = 5$) (a) - Differenz der Bezier-Kurven (b)

2.3.2 Basis-Splines

Im Unterschied zu den im vorherigen Abschnitt gezeigten Bezier-Kurven bestehen Basis-Splines oder B-Splines (De Boor (1978)) in der Regel aus mehreren Kurven-segmenten (Mortenson (2006)). Jedes dieser Segmente wird durch lediglich in der Umgebung liegende Eckpunkte des Polygons (im Folgenden Kontrollpunkte) sowie einem Knotenvektor beeinflusst und ermöglicht somit die lokale Editierung ohne Änderung der gesamten Kurve. Darüber hinaus ist der Grad der in der Basisfunktion genutzten Polynome unabhängig von der Anzahl der Kontrollpunkte. Der Ortsvektor $\underline{r}(u)$ kann, ähnlich zu Gleichung 2.15, durch

$$\underline{r}(u) = \sum_{i=0}^n \underline{c}_i N_{i,k}(u) \quad u \in [0, 1] \quad (2.19)$$

beschrieben werden. Die Basisfunktionen für nicht rationale B-Splines, das heißt B-Splines, die Anfangs- und Endkontrollpunkt interpolieren, können durch eine von der Bahnkoordinate u abhängige rekursive Funktion der Form

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u - \lambda_i) N_{i,k-1}(u)}{\lambda_{i+k-1} - \lambda_i} + \frac{(\lambda_{i+k} - u) N_{i+1,k-1}(u)}{\lambda_{i+k} - \lambda_{i+1}} \quad (2.20)$$

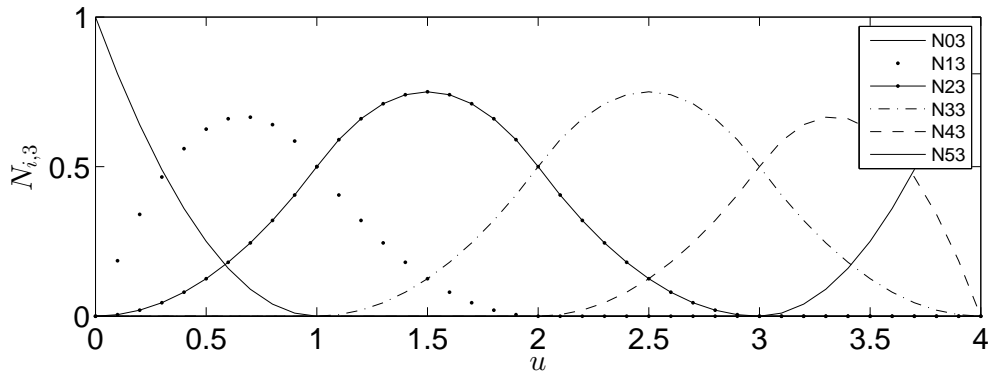
beschrieben werden. Hierbei beschreiben λ_j Knotenpunkte, die neben den Kontrollpunkten \underline{c}_i die Form des Splines beeinflussen, im Knotenvektor

$$\underline{\lambda} = \left[\underbrace{\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}}_{k \text{ externe Knoten}} \underbrace{\lambda_k, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n}_{n-k-1 \text{ interne Knoten}} \underbrace{\lambda_{n+1} \dots \lambda_{n+k}}_{k \text{ externe Knoten}} \right] \quad ; \quad j = 0, \dots, n+k \quad (2.21)$$

zusammengefasst sind und sich durch

$$\begin{aligned} \lambda_j &= 0 & j < K \\ \lambda_j &= i - k + 1 & K \leq j \leq n \\ \lambda_j &= n - k + 2 & j > n \end{aligned} \quad (2.22)$$

bestimmen lassen. Ein auf Gleichung 2.22 basierender Knotenvektor wird als einheitlich bzw. nicht äquidistant bezeichnet. Ähnlich zu den Bezier-Kurven ist n dabei die Gesamtzahl der Verbindungslinien des charakteristischen Polygons und i die Laufvariable aus Gleichung 2.19. k beschreibt im Folgenden die Ordnung bzw. den Grad $(k-1)$ des in der Basisfunktion $N_{i,k}(u)$ genutzten Polynoms. Für den Sonderfall $k=1$ können die

Abbildung 2.6: B-Spline Basisfunktionen ($n = 5$, $k = 3$)

Basisfunktionen als Schalter interpretiert und durch

$$\begin{aligned} N_{i,1}(u) &= 1 \quad \text{für} \quad \lambda_i \leq u < \lambda_{i+1} \\ &= 0 \quad \text{sonst} \end{aligned} \quad (2.23)$$

bestimmt werden (Mortenson (2006)). Abbildung 2.6 zeigt die aus Gleichung 2.20 resultierenden Basisfunktionen für 6 Eckpunkte ($n = 5$) und Polynomen 2ten Grades ($k = 3$). Im Gegensatz zu den Basisfunktionen der Bezier-Kurven, welche über das gesamte Intervall $u \in [u_o = 0, u_n = 1]$ die Form der resultierenden Kurve beeinflussen, zeigt sich bei den Basisfunktionen des B-Splines lediglich eine lokale Auswirkung. Dies folgt aus dem für den B-Spline angepassten neuen Intervall $u \in [u_o = 0, u_n = n - k + 2]$. So beeinflussen Basisfunktionen der vorderen bzw. hinteren Knotenpunkte auch nur den vorderen bzw. hinteren Abschnitt der resultierenden Kurve. Dies zeigt sich deutlich in dem in Abbildung 2.7 (a) dargestellten Beispiel, das ebenfalls auf den in Tabelle 2.1 gezeigten Werten basiert. So wirkt sich die Verschiebung des zweiten Kontrollpunktes lediglich auf die benachbarten beiden Abschnitte zwischen Kontrollpunkt eins und zwei bzw. zwei und drei aus. Wie bei der in Abbildung 2.7 (b) abgebildeten Differenz zu erkennen ist, bleibt der hintere Teil der Kurve von der Änderung unberührt. Grundsätzlich ist das Polygon, im Gegensatz zu den Bezier-Kurven, beim B-Spline eine konvexe Hüllfunktion, die die Kurve begrenzt und sich in die Übergänge zwischen den Abschnitten tangential an die Kurve anschmiegt.

Der Abschnitt zeigt, dass mit Hilfe von geometrischen Parametern wie dem Knotenvektor, Kontrollpunkten und Basisfunktionen räumliche Kurven erstellt werden, die den ersten und letzten der angegebenen Kontrollpunkte des Polygons interpolieren (vgl. Abbildung 2.8). Die Beeinflussung der Kurve über die direkte Vorgabe von Stützstellen („via-Points“ nach Dierckx (1995)) anstatt der geometrischen Parameter ist nicht

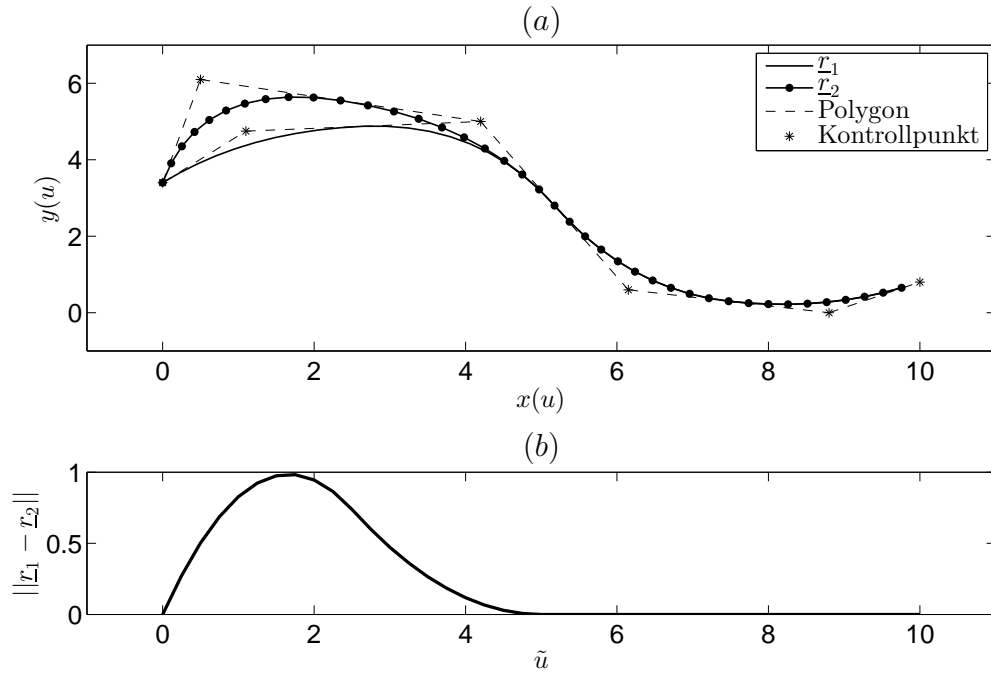


Abbildung 2.7: Vergleich: B-Spline mit Ortsvektor \underline{r}_1 und \underline{r}_2 ($n = 5$) (a) - Differenz der Splines (b)

möglich. Des Weiteren ist die Vorgabe von Tangenten und Krümmungen am Anfang bzw. Ende der Kurve nicht intuitiv durch die Vorgabe von Tangenten und Krümmungsvektoren, sondern nur durch die Wahl der Eckpunkte (Bezier) bzw. der Kontrollpunkte und Knoten (B-Spline) möglich. Die in der vorliegenden Arbeit genutzten realen Messwerte stellen die genaue Geometrie der Achterbahnschiene dar und sollen somit nicht als Eck- bzw. Kontrollpunkte eines Polygons, sondern als Stützstellen der Raumkurve abgebildet werden.

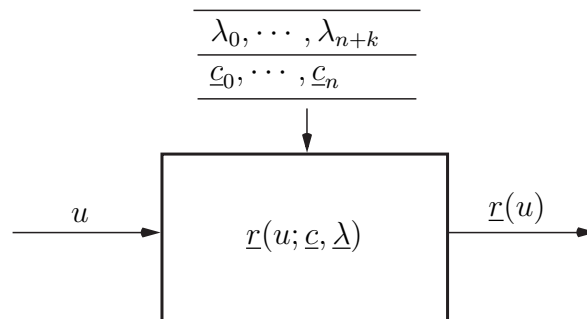


Abbildung 2.8: B-Spline: Abbildung der Bahnkoordinate auf einen Ortsvektor (nach Geu Flores (2013))

2.3.3 Dierckx-Splines

Der „Spline-Fitting-Algorithmus“ von DIERCKX (Dierckx (1995)) ermöglicht die Darstellung von Raumkurven anhand der Vorgabe von Stützstellen sowie der Tangenten- und Krümmungsvektoren an den Anfangs- und Endpunkten. Dies ermöglicht eine einfache und intuitive Modellierung von Schienengeometrien. Die zur Abbildung notwendigen Knoten des B-Splines werden von dem Algorithmus automatisch berechnet. Hierzu wird die FORTRAN Routine `concur` von Dierckx genutzt. Die Routine beinhaltet zum einen das „weighted least square spline fitting problem“ welches mit der Kostenfunktion

$$F(\underline{c}) = \sum_{i=1}^m [w_i(\underline{r}_i - \underline{r}(u_i, \underline{c}))]^2 \quad (2.24)$$

durch Optimierung die Knoten $\underline{\lambda}$ bestimmt. Zum anderen das in der vorliegenden Arbeit genutzte „constraint smoothing spline optimization problem“, das durch Optimierung der Kostenfunktion

$$F(\underline{c}) = \sum_{i=1}^g [\underline{r}^{(k)}(\lambda_i+, \underline{c}) - \underline{r}^{(k)}(\lambda_i-, \underline{c})]^2 \quad (2.25)$$

unter der Nebenbedingung

$$G(\underline{c}) = \sum_{i=1}^m [w_i(\underline{r}_i - \underline{r}(u_i, \underline{c}))]^2 \leq S \quad (2.26)$$

die geometrischen Parameter so bestimmt, dass die Summe von Absolutwerten der Sprünge in den höchsten Ableitungen von \underline{r} minimiert werden. Hierbei beschreibt g die Gesamtanzahl an Knoten und $\underline{r}^{(k)}(\lambda_i+, \underline{c}_i)$ bzw. $\underline{r}^{(k)}(\lambda_i-, \underline{c}_i)$ die n -te linke bzw. rechte Ableitung des Ortsvektors \underline{r} am Knoten λ_i . Durch die Wahl eines Glättungsfaktors⁵ S kann festgelegt werden, ob die Stützstellen \underline{c} interpoliert ($S=0$) oder approximiert ($S > 0$) werden sollen. S beschreibt hierbei die maximale Summe der quadrierten Abweichungen zwischen Stützstellen und dem Ortsvektor des Splines. Für den Fall der Approximation können verschiedenen Stützstellen \underline{c}_i mit verschiedene Gewichtungsfaktoren w_i versehen werden. Abbildung 2.9 zeigt, dass durch den Spline-Fitting-Algorithmus die Kurve nun in Abhängigkeit der Stützstellen \underline{c}_i und den dazugehörigen Bahnkoordinaten u_i sowie den Tangenten am Anfang (\underline{t}_0) bzw. am Ende (\underline{t}_n) beschrieben werden kann. Die in Tabelle 2.1 gezeigten Werte werden nun als Stützstellen \underline{c}_i für den Abbildung in 2.10 gezeigten Dierckx-Spline genutzt. Die Tangenten an den Eckpunkten

⁵ „engl.: *Smoothing-factor*“

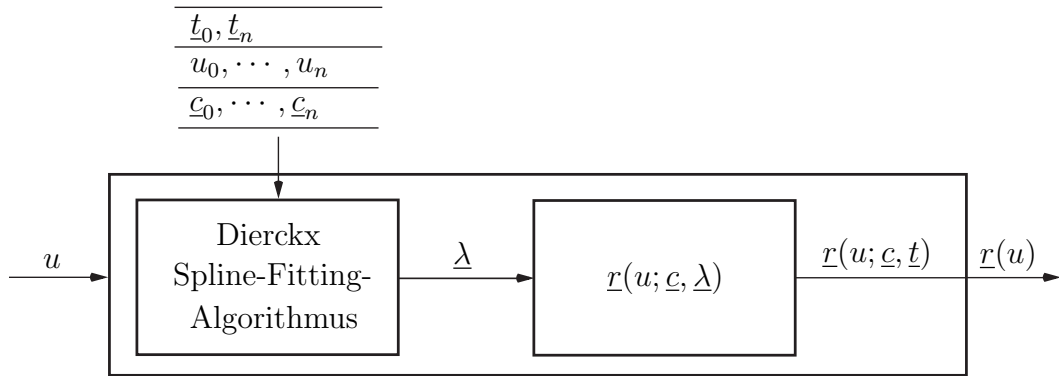


Abbildung 2.9: Dierckx-Spline: Abbildung der Bahnkoordinate auf einen Ortsvektor (nach Geu Flores (2013))

können durch die Differenzvektoren $\underline{t}_0 = \underline{c}_1 - \underline{c}_0$ und $\underline{t}_n = \underline{c}_n - \underline{c}_{n-1}$ bestimmt werden. Im Vergleich zu der Bezier-Kurve (Abbildung 2.5 (a)) und dem B-Spline (Abbildung 2.7 (a)) ist deutlich zu erkennen, dass der Dierckx-Spline mit einem Glättungsfaktor von $S = 0$, alle Stützstellen durch eine Funktion interpoliert bzw. bei einer Wahl des Glättungsfaktor von $S > 0$ approximiert.

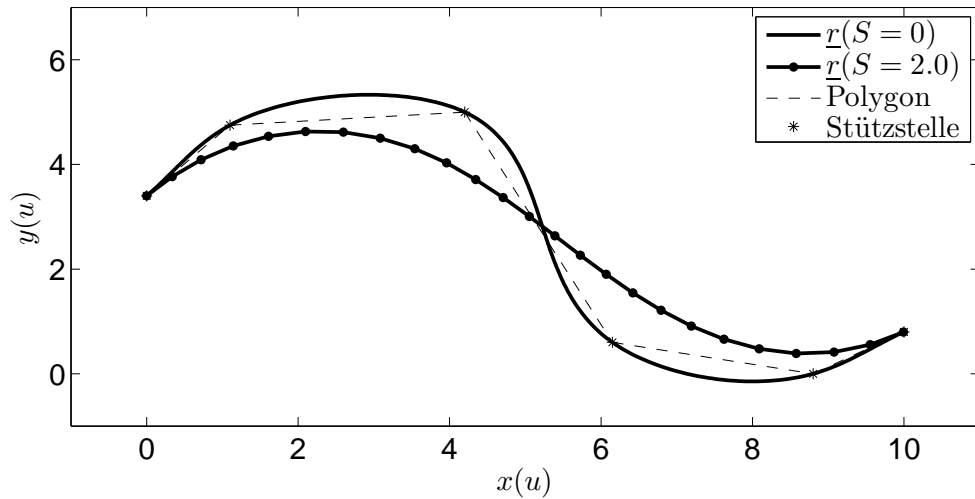


Abbildung 2.10: Vergleich: Dierckx-Spline mit Ortsvektor \underline{r} ($n = 5$, $S = 0$ bzw. $S = 2.0$)

2.3.4 Shape-Preserving-Splines

Shape-Preserving-Splines bieten ebenfalls die Möglichkeit, eine parametrisierte räumliche Kurve anhand von Stützstellen zu erzeugen (Renka (1987)). Im Gegensatz zum Dierckx-Spline werden die notwendigen Splinekoeffizienten durch einen iterativen Prozess ermittelt und hierbei so modifiziert, dass die im Folgenden beschriebenen Formeigenschaften der räumlichen Kurve eingehalten werden. Der gezeigte Inhalt des Abschnittes orientiert sich hierbei an Caspers (2014).

Um das Überschwingen einer Kurve beim Durchlaufen von Stützstellen zu verhindern, werden die Splinekoeffizienten so gewählt, dass die Kurve zwischen zwei Stützstellen entweder monoton steigend oder monoton fallend ist.

$$u_1 \leq u_2 \Rightarrow \underline{r}(u_1) \leq \underline{r}(u_2) \quad \text{bzw.} \quad u_1 \leq u_2 \Rightarrow \underline{r}(u_1) \geq \underline{r}(u_2), \quad (2.27)$$

Die in Gleichung 2.27 gezeigten Eigenschaften gelten jeweils für die einzelnen Koordinatenrichtungen x , y und z . Eine weitere Möglichkeit, das Überschwingen von Kurven zu vermeiden, ist die Kontrolle des Krümmungsverlaufes und somit die Vermeidung von Wendepunkten in einem definierten Intervall der Kurve. Hieraus folgt, dass eine konvexe Kurve, beschrieben durch

$$\underline{r}(h u_1 + (1 - h) u_2) \leq h \underline{r}(u_1) + (1 - h) \underline{r}(u_2) \quad \text{mit} \quad 0 \leq h \leq 1 \quad (2.28)$$

immer unterhalb (geringerer Wert auf der jeweiligen Achse) einer beliebigen Sekante im Intervall $D = [u_1, u_2]$ liegt bzw. immer eine positive Krümmung

$$\underline{r}''(u) \geq 0 \quad \text{mit} \quad u_1 \leq u \leq u_2 \quad (2.29)$$

auf dem Intervall aufweist und somit keine Wendepunkte besitzt. Analog hierzu wird eine Kurve, die immer oberhalb (höherer Wert auf der jeweiligen Achse) einer beliebigen Sekante liegt bzw. einen negativen Krümmungsverlauf aufweist und somit frei von Wendepunkten ist, als konkav bezeichnet. Eine weitere Eigenschaft von Shape-Preserving-Splines ist die Koplanarität der aus in einer Ebene liegenden Stützstellen resultierenden Kurve. Hieraus folgt, dass vier in einer Ebene liegende Stützstellen \underline{r}_{i-1} , \underline{r}_i , \underline{r}_{i+1} und \underline{r}_{i+2} durch eine ebenfalls in der Ebene liegende Kurve verbunden werden. Die zur Prüfung notwendige Ebene wird durch die ersten drei ($\alpha = 0$) bzw. letzten drei ($\alpha = 1$) Punkte und dem daraus resultierenden Normalenvektor

$$\tilde{n}_{i+\alpha} = (\underline{r}_{i+\alpha-1} - \underline{r}_{i+\alpha}) \times (\underline{r}_{i+\alpha+1} - \underline{r}_{i+\alpha}) \quad , \quad n_{i+\alpha} = \frac{\tilde{n}_{i+\alpha}}{\|\tilde{n}_{i+\alpha}\|} \quad (2.30)$$

definiert. Ist Punkt vier Bestandteil der Ebene und somit eine Linearkombination der ersten beiden Differenzvektoren aus Gleichung 2.30, ist die Determinante der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\underline{r}_{i+\alpha} - \underline{r}_{i+\alpha-1}) & (\underline{r}_{i+\alpha+1} - \underline{r}_{i+\alpha}) & (\underline{r}_{i+\alpha+2} - \underline{r}_{i+\alpha+1}) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

ungleich Null sowie

$$\underline{n}_{i+\alpha}^T \cdot \underline{n}_{i+\alpha+1} \neq 0. \quad (2.32)$$

Als Sonderfall der Koplanarität wird ebenfalls die Kolinearität auf einem definierten Intervall der Kurve untersucht. Aus der Kolinearität folgt, dass die verbindende Kurve von drei auf einer Gerade liegenden Stützstellen \underline{r}_{i-1} , \underline{r}_i und \underline{r}_{i+1} ebenfalls eine Gerade sein muss. Die zur Prüfung notwendige Gerade ist durch den Differenzvektor der ersten beiden ($\alpha = 0$) bzw. letzten beiden ($\alpha = 1$) Punkte

$$\Delta \underline{r}_{i+\alpha} = \underline{r}_{i+\alpha-1} - \underline{r}_{i+\alpha} \quad (2.33)$$

definiert. Durch ein Kreuzprodukt

$$\Delta \underline{r}_{i+\alpha} \times \Delta \underline{r}_{i+\alpha+1} = \underline{0} \quad (2.34)$$

und eine Projektion

$$\Delta \underline{r}_{i+\alpha}^T \cdot \Delta \underline{r}_{i+\alpha+1} \neq 0 \quad (2.35)$$

beider Differenzvektoren wird geprüft, ob sich der dritte Punkt auf der Verbindungslinie der ersten beiden befindet.

Bei der Erstellung von Shape-Preserving-Splines kann grundsätzlich zwischen zwei Methoden unterschieden werden. Bei der direkten Methode werden die den Spline charakterisierenden Parameter, wie der Knotenvektor $\underline{\lambda}$ oder der Vektor der Eck- bzw. Kontrollpunkte \underline{c} direkt um weitere Knoten, Eck- bzw. Kontrollpunkte erweitert. Bei der indirekten Methode wird der Spline iterativ an eine lineare Interpolation angenähert, bis die gewünschten Formeigenschaften erfüllt werden (Goodman (2001), Goodman u. Unsworth (1988)). Dies geschieht mit einem abhängig vom gewählten Verfahren definierten Spannungsfaktor⁶, der die Basisfunktionen der Kurve beeinflusst. Ein Beispiel hierfür sind die Verfahren von KAKLIS und KARAVELAS (Kaklis u. Karavelas (1997)) bzw. RENKA (Renka (1987)), die sich zwar in den genutzten Basisfunktionen unterscheiden, jedoch beide durch Variation des Spannungsfaktors die Trajektorie des resultierenden Splines an die gewünschten Formeigenschaften anpasst.

Identisch zu dem zuvor gezeigten Spline-Fitting-Algorithmus von Dierckx ermöglicht

⁶ „engl.: *Tension-factor*“

das iterative Verfahren nach Renka die direkte Vorgabe von Stützstellen \underline{c} zur Erstellung eines Splines. Bei der Form des resultierenden Splines mit C^2 -Kontinuität (vgl. Abschnitt 2.1.1) wird auf die Einhaltung der zuvor beschriebenen Formeigenschaften geachtet. Grundlage des Verfahrens ist eine homogene Differentialgleichung vierter Ordnung, welche für jeden Abschnitt j zwischen zwei Stützstellen durch

$$\underline{r}_j''''(s) - \left(\frac{\sigma_j}{s_{i+1} - s_i} \right)^2 \cdot \underline{r}_j''(s) = \underline{0} \quad s \in [s_i, s_{i+1}] \quad (2.36)$$

beschrieben werden kann. Hierbei ist σ_j der Spannungsfaktor des nach der Bogenlänge s parametrisierten und durch den Ortsvektor $\underline{r}_j(s)$ dargestellten Abschnitts (vgl. Kapitel 2.1.2) des Splines. s_{i+1} und s_i beschreiben die Bogenlängen an den jeweiligen Stützstellen $i + 1$ und i . Abbildung 2.11 zeigt ein Ablaufdiagramm zur iterativen Bestimmung des Spannungsfaktors. Der Startwert des Spannungsfaktors wird im ersten Schritt ($N = 1$) der Iteration gleich Null gewählt. Hierfür folgt aus Gleichung 2.36 eine kubische Funktion für $\underline{r}_j(s)$. Im gewählten Verfahren wird dies durch kubische Hermite-Kurven realisiert (Mortenson (2006)). Im nächsten Schritt werden die Tangenten an den Stützstellen s_i und s_{i+1} berechnet und mit Hilfe von Gleichung 2.29 auf Konvexität gegenüber den Sekanten des die Stützstellen verbindenden Polynoms geprüft. Bei Nichterfüllung der gewünschten Formeigenschaften wird der Spannungsfaktor so lange erhöht, bis die gewünschten Formeigenschaften erreicht werden, oder

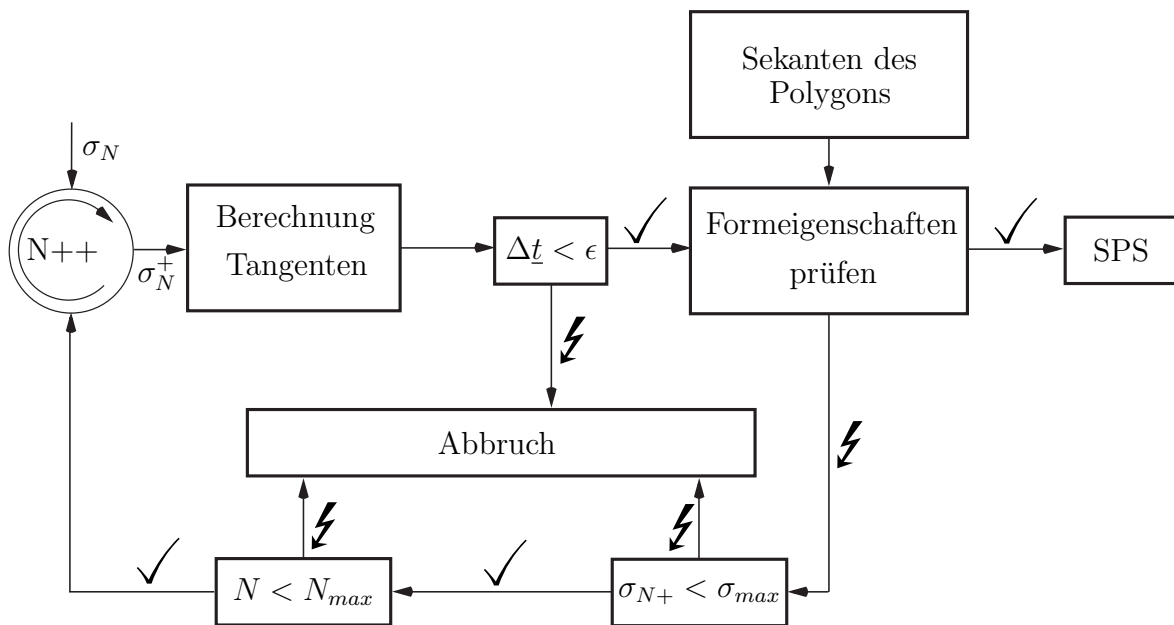


Abbildung 2.11: Ablaufdiagramm: Iterative Bestimmung des Tension-Faktors

eine der Abbruchbedingungen

1. maximal Anzahl an Iterationen: $N > N_{max}$,
2. maximaler Tension-Faktor: $\sigma_{N+} > \sigma_{max}$,
3. minimale Änderung der Tangenten: $\Delta \underline{t} < \epsilon$

erreicht wird⁷. Durch einen Spannungsfaktor ungleich Null ist eine Lösung von Gleichung 2.36 mit einer kubischen Funktion nicht mehr möglich. Aus diesem Grund gelten für $\sigma \neq 0$ im genutzten Verfahren die vier Basisfunktionen

$$B_{j,\sigma>0} = \begin{bmatrix} 1 & s & e^{\bar{\sigma}_j \cdot s} & e^{-\bar{\sigma}_j \cdot s} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Hierbei ist

$$\bar{\sigma}_j = \frac{\sigma_j}{s_{i+1} - s_i} \quad (2.38)$$

der auf den jeweiligen Abschnitt normierte Spannungsfaktor. Der Verlauf des Splines kann dann mit Hilfe der gezeigten Basisfunktionen durch

$$\begin{aligned} \underline{r}_j(s) = & \underline{r}_{i+1} - \underline{r}'_{i+1} \cdot (s_{i+1} - s) + \star^1 \\ & \frac{s_{i+1} - s_i}{\sigma_j \alpha_1} \cdot [(\underline{\alpha}_2 (\cosh(\sigma_j \tilde{s}) - 1)) - (\underline{\alpha}_3 (\sinh(\sigma_j \tilde{s}) - \sigma_j \tilde{s}))] \star^2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

beschrieben werden und ist somit eine mögliche Lösung der in 2.36 gezeigten Differentialgleichung. Hierbei ist \star^2 die vom Spannungsfaktor abhängige Anpassung der mit \star^1 gekennzeichneten linearen Interpolation der Stützpunkte. Gleichung 2.39 zeigt, dass durch eine Erhöhung des Spannungsfaktors σ_j der Einfluss von \star^2 verringert wird und der resultierende Spline immer näher an eine reine lineare Interpolationen geführt wird. Hierbei beschreibt

$$\tilde{s} = \frac{s_{i+1} - s}{s_{i+1} - s_i} \quad (2.40)$$

die normierte Bogenlänge und

$$\alpha_1 = (\cosh(\sigma_i) - 1)^2 - (\sinh(\sigma_i) - \sigma_i) \sinh(\sigma_i), \quad (2.41)$$

$$\underline{\alpha}_2 = \sigma_i (\cosh(\sigma_i) - 1) (\underline{r}'_{i+1} - \underline{d}) - (\sinh(\sigma_i) - \sigma_i) (\underline{r}_{i+1} - \underline{r}_i) \quad \text{sowie} \quad (2.42)$$

$$\underline{\alpha}_3 = \sigma_i (\sinh(\sigma_i) - \sigma_i) (\underline{r}'_{i+1} - \underline{d}) - (\cosh(\sigma_i) - 1) (\underline{r}_{i+1} - \underline{r}_i) \quad (2.43)$$

⁷Grundsätzlich ist es in dem Verfahren nach Renka neben der in Abbildung 2.11 gezeigten iterativen Bestimmung ebenfalls möglich, die Spannungsfaktoren σ_j für jeden der j Abschnitte direkt vorzugeben.

mit

$$\underline{d} = \underline{r}'_{i+1} - \frac{\underline{r}_{i+1} - \underline{r}_i}{s_{i+1} - s_i} \quad (2.44)$$

die gezeigten Vereinfachungen aus Gleichung 2.39. Die notwendigen Hyperbolikusfunktionen können durch

$$\cosh(\sigma) = 0.5 (e^\sigma + e^{-\sigma}) \quad \text{und} \quad \sinh(\sigma) = 0.5 (e^\sigma - e^{-\sigma}) \quad (2.45)$$

in die Basisfunktionen aus Gleichung 2.37 umgewandelt werden und erfüllen somit alle notwendigen Bedingungen zur Lösung der Differentialgleichung aus Gleichung 2.36. Abschließend kann der Gesamtverlauf des Splines als Summe der n Ortsvektoren und somit durch

$$\underline{r}(s) = \sum_{j=1}^n \underline{r}_j(s) M_j(s) \quad (2.46)$$

beschrieben werden. Ähnlich zu den in Gleichung 2.23 gezeigten Basisfunktionen können die Faktoren

$$M_j(s) = 1 \quad \text{für} \quad s_i \leq s < s_{i+1} \quad (2.47)$$

$$= 0 \quad \text{sonst} \quad (2.48)$$

als Schalter interpretiert werden. Abbildung 2.12 zeigt einen auf den Werten aus Tabelle 2.1 basierenden Shape-Preserving-Spline im Vergleich zu dem aus Abbildung 2.10 bekannten interpolierenden Dierckx-Spline. Im Vergleich ist deutlich zu erkennen, dass der Shape-Preserving-Spline die Stützpunkte nahezu linear interpoliert.

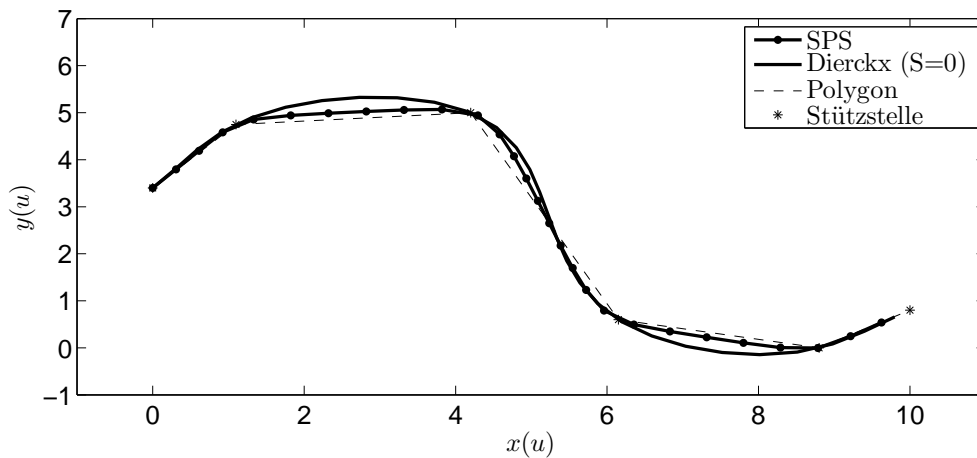


Abbildung 2.12: Vergleich: Dierckx-Spline ($n = 5$, $k = 2$, $S = 0$) und SPS ($n = 5$)

2.4 Modellierung und Analyse von Schienengeometrien

Der folgende Abschnitt zeigt die in der vorliegenden Arbeit genutzten Methoden zur Modellierung und Analyse von Schienengeometrien. Hierzu wird zunächst auf die Erstellung von Layouts eingegangen, die den gewünschten Verlauf einer neu zu planenden Achterbahngeometrie darstellen und am Anfang jedes Entwicklungsprozesses stehen. Im Anschluss daran wird die Berechnung von real vermessenen Schienenabweichungen dargestellt. Die vermessenen Abweichungen können dann durch verschiedene vorgestellte Methoden in der Simulation berücksichtigt werden.

2.4.1 Erstellen von Layouts

Die in diesem Kapitel gezeigten Methoden zur Abbildung von Punkten im dreidimensionalen Raum durch eine Kurve sollen im Folgenden dazu genutzt werden, um die Geometrie einer Achterbahn abzubilden. Hierzu wird zunächst eine Layoutgeometrie erstellt, die die gewünschte Streckenführung grob abbildet. Dazu werden im ersten Schritt Kontrollpunkte entlang der gewünschten Geometrie festgelegt und mit B-Splines dritter Ordnung verbunden. Dies garantiert eine intuitive, einfache und schnelle Modellierung des groben Layoutverlaufes auf einem handelsüblichen Computer (Tändl (2009)). Im zweiten Schritt werden aus den B-Splines Stützstellen abgeleitet und durch einen glatten Spline verbunden, welcher mit Hilfe des Spline-Fitting-Algorithmus (vgl. Abschnitt 2.3.3) von Dierckx berechnet wird. Im dritten Schritt kann, falls notwendig, durch Optimierung die aus Schritt zwei resultierende Splinegeometrie so angepasst werden, dass die auf den Passagier wirkenden mittleren Beschleunigungen die Normen des Deut-

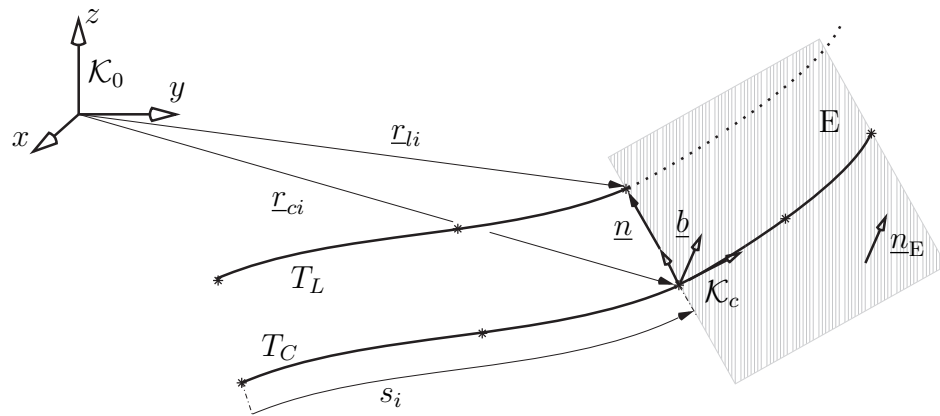


Abbildung 2.13: Berechnung der Stützpunkte der Schienen-Splines am Beispiel der linken Schiene

ches Institut für Normung e.V. (2004) einhalten. Ziel des Layoutdesigns ist ein Spline, dessen Binormalenvektor \underline{b} des Koordinatensystems \mathcal{K}_c den Normalenvektor \underline{n}_E der Schienenebene E darstellt. Vektor \underline{n} wird im Folgenden auch als Lateralvektor bzw. Richtungsvektor der Lateralrichtung und Vektor \underline{b} als Vertikalvektor bzw. Richtungsvektor der Vertikalrichtung bezeichnet. Aus dem Layout-Center-Spline können durch die in Abbildung 2.13 dargestellte Vorgehensweise zwei weitere Splines berechnet werden. Hierbei wird das Koordinatensystem \mathcal{K}_c in Abhängigkeit der Bahnkoordinate s an jeder einzelnen Stützstelle i des Layout-Center-Splines positioniert. Aus der Orientierung und Position von \mathcal{K}_c können dann durch

$$\underline{r}_{li} = \underline{r}_{ci} + 0.5 S_w \underline{n} \quad \text{bzw.} \quad \underline{r}_{ri} = \underline{r}_{ci} - 0.5 S_w \underline{n} \quad (2.49)$$

die jeweiligen Stützstellen des linken bzw. rechten Schienen-Splines berechnet werden. S_w beschreibt hierbei die gewünschte Spurbreite der Bahn. Die aus den so entstehenden Stützstellen \underline{r}_{li} und \underline{r}_{ri} resultierenden Splines beschreiben die linke und rechte Layoutgeometrie T_L und T_R .

2.4.2 Berechnung und Darstellung von Schienenabweichungen

Aufgrund von Fertigungstoleranzen, Witterungseinflüssen, Messfehlern sowie Abnutzung ist der Verlauf der realen Schienen nicht identisch mit dem der Layoutgeometrie. Durch die Vermessung der Schienengeometrie während der Produktion, nach der Installation oder während des Betriebs kann der reale Schienenverlauf in Form einer

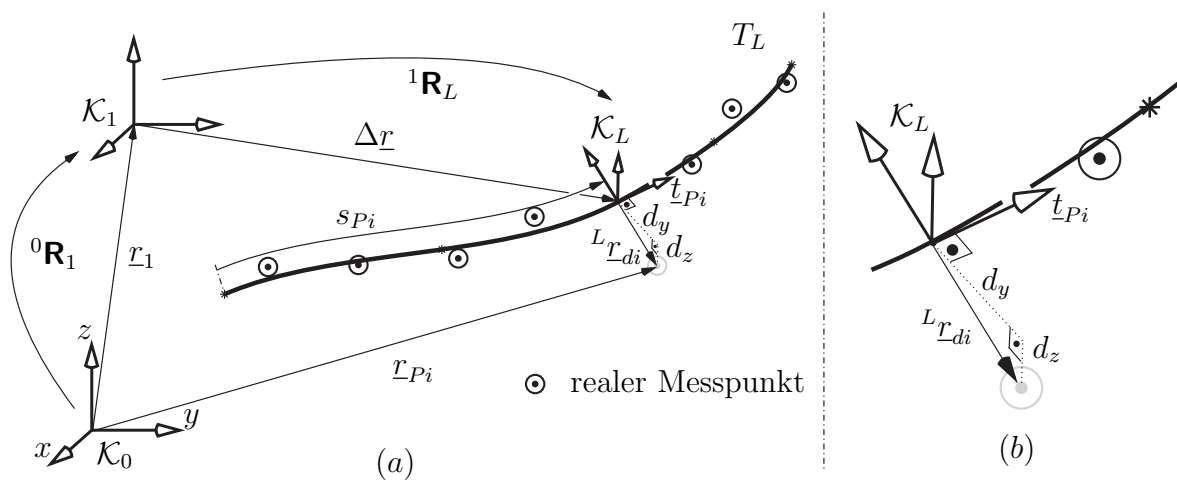


Abbildung 2.14: Berechnung der Abweichung zwischen real vermessener Schiene und Layoutgeometrie am Beispiel der linken Schiene (a) - Zoomdarstellung (b)

Vielzahl von Messpunkten \underline{r}_{Pi} erfasst werden. Hieraus lässt sich mit dem in Abbildung 2.14 dargestellten Verfahren⁸ die minimale Abweichung zwischen realer Schiene und Layoutgeometrie bestimmen. Durch ein iteratives Verfahren (Beispielsweise Newton-Verfahren) kann mit Hilfe einer geometrischen Bindung (vgl. Kapitel 3.2.4) eine zu jedem Messpunkt \underline{r}_{Pi} gehörige Bogenlänge s_{ip} gefunden werden, in der die Projektion des Differenzvektors \underline{r}_{di} auf die Bahntangente \underline{t}_{Pi} gleich Null ist. Hieraus folgt, dass die Summe aller N^9 Abweichungen mit Hilfe des Vektors

$${}^L \underline{r}_{di} = [{}^0 \mathbf{R}_1 {}^1 \mathbf{R}_L(s_{Pi})]^T [\underline{r}_{Pi} - \underline{r}_1 - {}^0 \mathbf{R}_1 \Delta \underline{r}(s_{Pi})] = \begin{bmatrix} 0 \\ d_{yi} \\ d_{zi} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

durch

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N \|{}^L \underline{r}_{di}\| \quad (2.51)$$

beschrieben werden kann. Durch die Formulierung eines Optimierungsproblems (Fletcher (2013)) der Form

$$\min f(\underline{x}) \quad \text{unter} \quad \underline{x} \in X, \quad X \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.52)$$

kann mit Hilfe der Kostenfunktion 2.51, mit dem Lösungsraum X und einem Designvektor

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} r_{1x} & r_{1y} & r_{1z} & \varphi_1 & \theta_1 & \psi_1 \end{bmatrix}^T \quad (2.53)$$

die Layoutgeometrie T_L so in die Messpunkt wolke eingepasst werden, dass die Summe der Abstände zu den Messpunkten minimal wird. Designvektor \underline{x} beschreibt hierbei die globale Lage und Orientierung des Koordinatensystem \mathcal{K}_1 . Der Lösungsraum X ist abhängig von dem jeweiligen gewählten Schienenabschnitt. Durch diese Einpassung werden die minimal möglichen Abweichungen d_{yi} und d_{zi} von der Layoutgeometrie bestimmt. Die gezeigte Vorgehensweise wurde am Beispiel einer linken Schiene eingeführt, ist aber identisch für eine rechte Schiene anwendbar.

2.4.3 Methoden zur Modellierung von Schienenabweichungen

Im Vergleich zu den in der Designphase erstellten, auf der Layoutgeometrie basierenden Simulationsergebnissen können die real gemessenen Fahrzeugbeschleunigungen

⁸Aus interner Mitteilung Maurer AG: Dr. Martin Schneider, Dr. Martin Tändl.

⁹In diesem Zusammenhang keine Iterationen zur Bestimmung von σ (vgl. Abschnitt 2.3.4)

aufgrund von realen Schienenabweichungen erheblich abweichen. Aus diesem Grund ist eine Modellierung der realen Schienengeometrie für eine realitätsnahe Simulation der Fahrzeugbeschleunigungen essentiell. Tabelle 2.15 zeigt die in der vorliegenden Arbeit genutzten und im Folgenden mit *I*, *II* und *III* bezeichneten Methoden zur Modellierung von Schienenabweichungen.

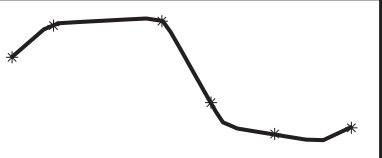
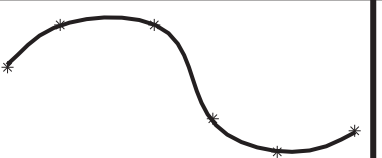
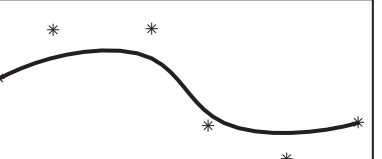
Interpolation		Approximation
Shape-Preserving-Spline	Dierckx-Spline $S = 0$	Dierckx-Spline $S > 0$
Methode <i>I</i>	Methode <i>II</i>	Methode <i>III</i>
		

Abbildung 2.15: Methoden zur Modellierung von Schienenabweichungen

2.4.4 Berechnung von modellierten Schienenabweichungen

Die aus den verschiedenen Methoden resultierenden Schienenabweichungen sind ausschlaggebend für eine realitätsnahe Anregung des Simulationsmodells. Um diese mit dem in Abschnitt 2.4.2 eingeführten Verfahren darstellen zu können, müssen zunächst fiktive Messpunkte erzeugt werden. Wie in Abbildung 2.16 gezeigt, wird hierzu die Schiene mit einem der in Tabelle 2.15 gezeigten Verfahren modelliert. Anschließend wird der zu jedem Stützpunkt zugehörige Ortsvektor \underline{r}_{Pi}^* als Messpunkt abgespeichert. Die resultierenden Abweichungen der Messpunkte können dann identisch zu den realen Abweichungen mit dem in Abschnitt 2.4.2 gezeigten Verfahren bestimmt werden.

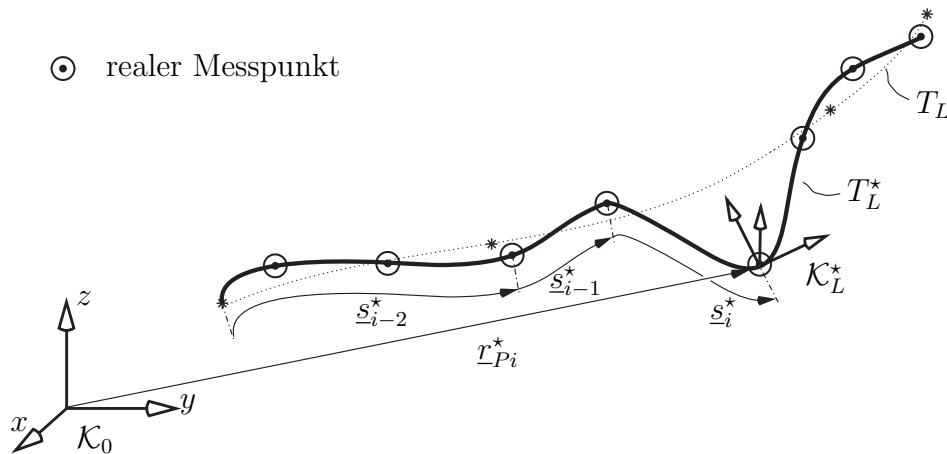


Abbildung 2.16: Abbildung von realen Messpunkten durch Stützstellen eines Splines

3 Grundlagen der Modellbildung von Mehrkörpersystemen

Kapitel 3 beschreibt im ersten Abschnitt die Grundlagen der Modellbildung und Simulation der in dieser Arbeit betrachteten Mehrkörpersysteme, also Systeme mit offener Baumstruktur. Hierzu werden zunächst allgemeine Lagekoordinaten eingeführt und anschließend auf verallgemeinerte- bzw. Minimalkoordinaten reduziert. In Abschnitt zwei wird detailliert auf das in der vorliegenden Arbeit genutzte Rad-Schiene-Kontakt- und Reibkraftmodell eingegangen. Im Anschluss daran folgt ein detaillierter Aufbau des Achterbahnfahrzeugmodells. Der vierte Abschnitt zeigt Details des zur Simulation benötigten numerischen Integrationsverfahrens. Das Kapitel schließt mit einer Darstellung der in der vorliegenden Arbeit entstandenen kinetostatischen Grundelemente.

3.1 Methoden zur Modellierung von Mehrkörpersystemen

Der folgende Abschnitt zeigt zunächst kurz die Modellierung von Mehrkörpersystemen unter der Verwendung von LAGRANGE'schen Gleichungen erster Art (Historischer Verweis: de Lagrange (1788), de Lagrange u. Murhard (1797)). Diese können dann durch Nutzung einer Geschwindigkeits-Übertragungsmatrix (Nikraves (1988)) auf Minimalform projiziert werden. Der Abschnitt endet mit einer alternativen Darstellungsform in Minimalkoordinaten und zeigt eine detaillierte Einführung in kinetostatische Übertragungselemente (Kecskeméthy (1993)), welche den in der vorliegenden Arbeit gezeigten Ergebnissen zu Grunde liegen. Da in der vorliegenden Arbeit ausschließlich Systeme mit offenen Schleifen zur Anwendung kommen, wird auf die Herleitung im Rahmen dieser Arbeit verzichtet und in den folgenden Abschnitten jeweils auf die passende Fachliteratur verwiesen.

3.1.1 Lagrange'sche Gleichungen erster Art

Ein beliebiges Mehrkörpersystem mit offenen sowie geschlossenen Schleifen kann mit Hilfe eines System von $n + g$ differential-algebraischen Gleichungen der Form

$$\mathbf{M}(\underline{x})\ddot{\underline{x}} - \mathbf{J}_f^T \underline{\lambda} = \underline{F}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t) - \underline{b}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) \quad \text{sowie} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{J}_f \ddot{\underline{x}} = -\dot{\mathbf{J}}_f \dot{\underline{x}} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

dargestellt werden. Hierbei beschreibt n die Anzahl der allgemeinen Lagekoordinaten und g die Anzahl der geometrischen, kinematischen sowie rheonomen Bindungen. \mathbf{M} beinhaltet dabei die einzelnen Massenmatrizen sowie Trägheitstensoren, $\underline{\ddot{x}}$ die Starrkörperbeschleunigungen, $\underline{\lambda}^1$ die LAGRANGE'schen Multiplikatoren der Bindungsgleichungen $\phi(\underline{x}) = \underline{0}$, \mathbf{J}_f^T beschreibt die transponierte JACOBI-Matrix, \underline{F} die verallgemeinerten Kräfte (Feder, Dämpfer, etc.) und \underline{b} die Coriolis- und Zentrifugalkräfte sowie die gyrokopischen Terme. Zusätzlich zu den in Gleichung 3.1 dargestellten NEWTON-EULER Gleichungen kann durch die in Gleichung 3.2 dargestellte zweifache Differenzierung des Vektors der Bindungsgleichungen $\phi(\underline{x}) = \underline{0}$ ein Gleichungssystem geschaffen werden, das in vielen kommerziellen Mehrkörpersimulationsprogrammen, beispielsweise ADAMS (Orlandea u. a. (1979), Negrut u. Harris (2001)), DADS (Smith u. Haug (1990)) oder SIMPACK (Kik u. a. (1989), SimpackAG (1990)) zur Verwendung kommt. Vorteil des dargestellten Gleichungssystems ist zum einen die einfach automatisierbare Erstellung der Jacobi-Matrix sowie derer Zeitableitungen. Zum anderen ist dies die numerisch effiziente Lösbarkeit aufgrund der dünn besetzten Matrizen \mathbf{M} , \mathbf{J}_f und $\dot{\mathbf{J}}_f$. Von Nachteil ist zum einen, dass aufgrund der notwendigen Integration der Bindungsgleichungen auf Geschwindigkeits- und Positionsebene, abhängig vom gewählten Integrationsverfahren sowie den Integrationstoleranzen, ein Drift in den Bindungsgleichungen entsteht. Dieser muss ggf. aufwendig durch eine BAUMGARTE -Stabilisierung (Baumgarte (1972)) reduziert werden. Zum anderen ist von Nachteil, dass die Größe des Gleichungssystems aufgrund der nicht unabhängigen allgemeinen Lagekoordinaten sowie den Bindungsgleichungen schnell anwachsen kann. Zur Reduktion der Größe des Gleichungssystems sowie zur Vermeidung des Drifts kann eine Projektion auf die Minimalkoordinaten durchgeführt werden. Diese soll im Folgenden kurz dargestellt werden.

3.1.2 Projektion auf Minimalkoordinaten

Der aus Gleichung 3.1 bekannte Vektor $\underline{\ddot{x}}$ der Starrkörperbeschleunigungen kann in

$$\underline{\ddot{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\ddot{q}} \\ \underline{\ddot{\beta}} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

unterteilt werden. Hierbei beschreibt $\underline{\ddot{q}}$ die f unabhängigen (verallgemeinerten) Beschleunigungen und $\underline{\ddot{\beta}}$ die $n - f$ abhängigen Beschleunigungen des Systems. Es kann gezeigt werden (Kim u. Vanderploeg (1986), Nikravesh (1990)), dass es eine lineare

¹Im diesem Zusammenhang nicht der Knotenvektor eines Dierckx-Splines (vgl. Gleichung 2.20).

Geschwindigkeits-Übertragungsmatrix² der Form

$$\dot{\underline{x}} = \mathbf{B} \dot{\underline{q}} \quad (3.4)$$

gibt, welche die verallgemeinerten Koordinaten und allgemeinen Lagekoordinaten verbindet. Eine entscheidende Eigenschaft der Übertragungsmatrix \mathbf{B} ist ihre Orthogonalität zur Jacobi-Matrix der Bindungsgleichungen welche durch

$$\mathbf{J}_f \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

gegen ist. Durch Substitution der Zeitableitung aus Gleichung 3.4 und Multiplikation mit der transponierten Übertragungsmatrix ergibt sich für Gleichung 3.1

$$\overline{\mathbf{M}}(\underline{q})\ddot{\underline{q}} = \overline{\underline{F}}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) - \overline{\underline{b}}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}). \quad (3.6)$$

Hierbei ist ähnlich zu den im vorherigen Abschnitt gezeigten Matrizen $\overline{\mathbf{M}}$ die $f \times f$ generalisierte Massenmatrix und $\overline{\underline{F}}$ sowie $\overline{\underline{b}}$ die $f \times 1$ Vektoren der generalisierten Kräfte sowie der Coriolis-, Zentrifugalkräfte und gyrokopischer Terme welche durch

$$\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B}, \quad (3.7)$$

$$\overline{\underline{F}} = \mathbf{B}^T \underline{F} \quad \text{und} \quad (3.8)$$

$$\overline{\underline{b}} = \mathbf{B}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{B}} \dot{\underline{q}} \quad (3.9)$$

beschrieben werden können. Vorteil der in Gleichung 3.6 dargestellten Beschreibung ist zum einen die Verringerung der Dimension (um $n - f$ Gleichungen) des Gleichungssystems und die damit einhergehende Effizienzsteigerung während der numerischen Integration und zum anderen die numerische Stabilisierung aufgrund der Eliminierung der Bindungsgleichungen. Nachteil ist der erhöhte algebraische Rechenaufwand der durch die zusätzlichen Matrixoperationen aus Gleichung 3.7 - 3.9 entsteht. Falls Systeme mit geschlossen Schleifen berücksichtigt werden, kommen zu Gleichung 3.6 noch zusätzliche Schließbedingungen, die parallel gelöst werden müssen. Die Modellierung von Systemen mit geschlossenen Schleifen liegt außerhalb der Betrachtung der vorliegenden Arbeit, kann jedoch detailliert in Nikravesh (1990) nachgelesen werden.

Eine Möglichkeit, die Vorteile (automatische Gleichungsgenerierung, effiziente Integration) der in Abschnitt 3.1.1 und 3.1.2 gezeigten Methoden unter Verwendung von Minimalkoordinaten zu kombinieren, ist die Nutzung des Konzepts der kinetostatischen Übertragungselemente (Kecskenéthy (1993)), welche im Folgenden vorgestellt wird.

²In der Literatur findet sich ebenfalls der Begriff „Jacobi-Matrix der Übertragungsgleichung“.

3.1.3 Objektorientierte Modellierung dynamischer Systeme mit kinetostatischen Übertragungselementen

Die Modellierung dynamischer Systeme mit kinetostatischen Übertragungselementen basiert auf der Übertragung von Bewegungen („doMotion“) \underline{q} , $\dot{\underline{q}}$ bzw. $\ddot{\underline{q}}$ und Kräften bzw. Momenten („doForce“) \underline{Q} , zwischen Zustand 1 (Eingang) und Zustand 2 (Ausgang), welcher im Folgenden mit dem Exponent³ „/“ gekennzeichnet wird (vgl. Kecskeméthy u. Hiller (1994)). In der grundsätzlichen Betrachtung können die Zustandsgrößen in translatorische und rotatorische Größen aufgeteilt werden. Daraus folgt auf Geschwindigkeits- bzw. Kraftebene

$$\dot{\underline{q}} = \underline{w} = \begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ \underline{v} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{Q} = \underline{t} = \begin{bmatrix} \underline{\tau} \\ \underline{f} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

wobei \underline{w} auch als Geschwindigkeitswinder („engl.: *wrench*“) und \underline{t} als Kraftwinder („engl.: *twist*“) bezeichnet wird (Kecskeméthy (1996)). Die kinematische Transformation zwischen Zustand 1 und Zustand 2 des in Abbildung 3.1 (a) dargestellten einfachen kinetostatische Übertragungselements kann mit Hilfe von Übertragungsgleichungen der Form

$$\underline{q}' = \underline{\Phi}(\underline{q}), \quad (3.11)$$

$$\dot{\underline{q}}' = \mathbf{J}_q \dot{\underline{q}} \quad \text{und} \quad (3.12)$$

$$\ddot{\underline{q}}' = \mathbf{J}_q \ddot{\underline{q}} + \dot{\mathbf{J}}_q \dot{\underline{q}} \quad (3.13)$$

durchgeführt werden. Hierbei beschreibt \mathbf{J}_q die Jacobi-Matrix⁵ des Übertragungselements, welche durch partielle Ableitung der Übertragungsfunktionen $\underline{\Phi}$ nach den Koordinaten \underline{q} in der Form

$$\mathbf{J}_q = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{q}} \quad (3.14)$$

berechnet werden kann. Aus der Annahme idealer, das heißt energieneutraler kinetostatischer Übertragung folgt

$$\delta \underline{q}^T \underline{Q} = \delta \underline{q}'^T \underline{Q}' \quad (3.15)$$

³Die vorliegende Arbeit folgt hier der Notation von Kecskeméthy (1993). Das Hochkomma ist in diesem Zusammenhang keine Differenzierung, sondern eine Größe auf der Ausgangsseite.

⁴Im Zusammenhang mit kinetostatischen Übertragungselementen kein Tangentenvektor.

⁵Der Begriff „Jacobi-Matrix“ wurde in Abschnitt 3.1.1 für die partiellen Ableitungen der Bindungsgleichungen nach den verallgemeinerten Koordinaten eingeführt. Im Folgenden wird der Begriff jedoch für Übertragungsmatrizen (definiert durch Gleichung 3.14) genutzt.

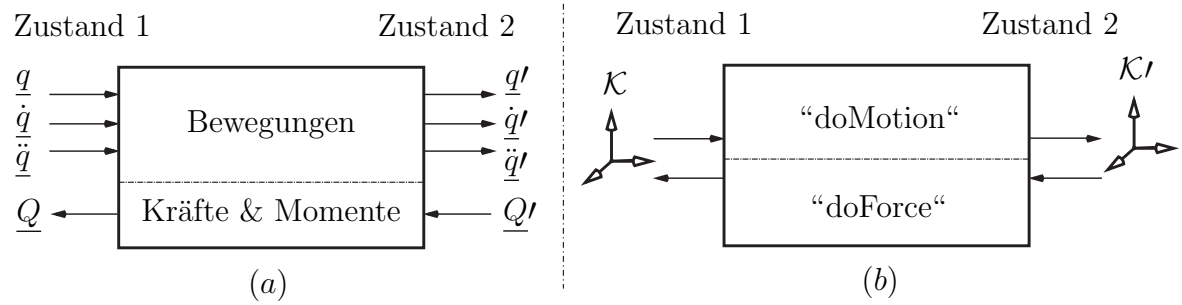


Abbildung 3.1: Kinetostatisches Übertragungselement: Mit Zustandsgrößen (a) - Zustandsobjekten (b)

und somit eine identische virtuelle Arbeit in Zustand 1 und 2. Aus Substitution von Gleichung 3.12 folgt aus einem Koeffizientenvergleich die Kraftübertragung von Zustand 2 in 1 mit Hilfe der transponierten Jacobi-Matrix in der Form

$$\underline{Q} = \mathbf{J}_q^T \underline{Q}'. \quad (3.16)$$

Hieraus wird die natürliche Übertragung der Kräfte mit entgegengesetzter Richtung der Bewegung, jedoch mit identischer, lediglich transponierter Jacobi-Matrix ersichtlich. Eine weitere Interpretationsmöglichkeit der Übertragung ist in Abbildung 3.1 (b) dargestellt. Hierbei werden alle Zustandsgrößen in Zustandsobjekten der Form

$$[\mathcal{K}'] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}' \\ \underline{r}' \\ \underline{\omega}' \\ \underline{v}' \\ \underline{\dot{\omega}}' \\ \underline{\dot{v}}' \\ \underline{\tau}' \\ \underline{f}' \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Orientierung} \\ \text{Position} \\ \text{Winkelgeschwindigkeit} \\ \text{translatorische Geschwindigkeit} \\ \text{Winkelbeschleunigung} \\ \text{translatorische Beschleunigung} \\ \text{Moment} \\ \text{Kraft} \end{array} \quad (3.17)$$

gebündelt (Kecskeméthy (2002)). Die im vorliegenden Abschnitt gezeigte Modellierung von Mehrkörpersystemen mit kinetostatischen Übertragungselementen ist Basis der objektorientierten Simulationsumgebung MIBILE (Kecskeméthy (1993)). Diese Betrachtung erleichtert die detaillierte Beschreibung der in Abschnitt 3.5 dargestellten Grundobjekte der Schwingungssimulation von Achterbahnfahrzeugen. Alle dargestell-

ten Zusammenhänge gelten für Systeme mit offenen Schleifen. Eine detaillierte Diskussion von Systemen mit geschlossenen Schleifen ist in Kecskeméthy (2002) gezeigt, jedoch außerhalb der Betrachtung in der vorliegenden Arbeit.

3.2 Rad-Schiene-Kontakt- und Reibkraftmodell

Der vorliegenden Abschnitt stellt das in der vorliegenden Arbeit genutzte Rad-Schiene-Kontaktmodell vor. Hierzu werden zunächst allgemein die geometrischen Zusammenhänge zwischen zwei Zylindern betrachtet. Anschließend wird das Modell durch Berücksichtigung von Roll- und Gleitreibung zu einem vollständigen Rad-Schienen-Starrkörpermodell erweitert. Der Abschnitt endet mit einem detaillierten Vergleich unterschiedlicher Ansätze zur Modellierung des Kontaktes zylindrischer Räder auf Achterbahnschienen. Die Arbeiten des Verfassers dieser Dissertation sind in einer vorherigen Publikation (Malessa u. Kecskeméthy (2012a)) veröffentlicht und sind hier der besseren Übersichtlichkeit wegen ausführlich beschrieben.

3.2.1 Kontakt zwischen zwei Zylindermantelflächen

Wie in Abbildung 3.2 dargestellt, kann der Kontakt zwischen Rad und Schiene als Kontakt zwischen zwei Zylindern betrachtet werden. Hierbei beschreiben \underline{u}_l und \underline{u}_r die Richtungsvektoren der Symmetrieachsen und R_l sowie R_r die Radien der Zylinder.

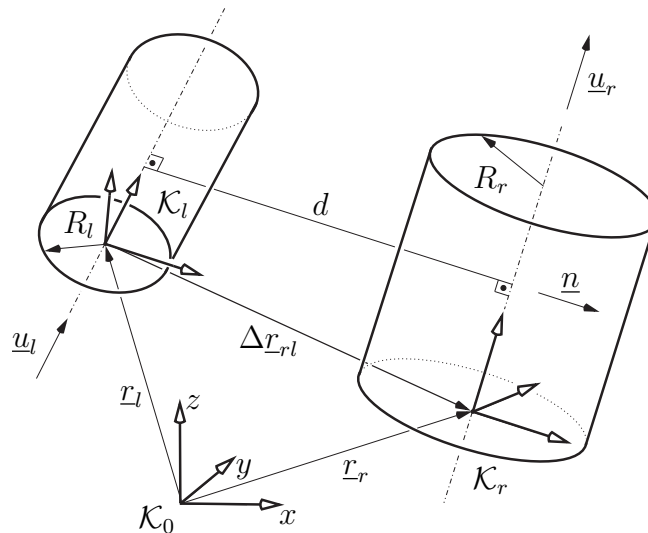


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung zur Abstandsberechnung zwischen zwei Zylindermantelflächen

Der normierte Richtungsvektor \underline{n} der kürzesten Verbindungslinie kann dabei durch

$$\tilde{\underline{n}} = \underline{u}_l \times \underline{u}_r \quad , \quad \underline{n} = \frac{\tilde{\underline{n}}}{\|\tilde{\underline{n}}\|} \quad \text{bzw.} \quad \underline{n} = \frac{\underline{u}_l \times \underline{u}_r}{\|\underline{u}_l \times \underline{u}_r\|} \quad (3.18)$$

bestimmt werden. Unter Berücksichtigung beider Radien kann der Abstand zwischen beiden Zylindern dann durch Projektion des Verbindungsvektors beider Symmetrielinien $\Delta \underline{r}_{lr}$ auf Vektor \underline{n} durch

$$d = \underline{n}^T \Delta \underline{r}_{rl} - (R_l + R_r). \quad (3.19)$$

berechnet werden. Aus der Differenzierung nach der Zeit ergibt sich die Geschwindigkeit zwischen beiden Zylindern:

$$\dot{d} = \dot{\underline{n}}^T \Delta \underline{r}_{rl} + \underline{n}^T \Delta \dot{\underline{r}}_{rl}. \quad (3.20)$$

Hierbei beschreibt $\Delta \dot{\underline{r}}_{lr}$ die translatorische Differenzgeschwindigkeit und $\dot{\underline{n}}$ die Änderung des Richtungsvektors welche durch

$$\dot{\underline{n}} = \frac{\dot{\underline{n}} \cdot \|\tilde{\underline{n}}\| - \|\dot{\underline{n}}\| \cdot \tilde{\underline{n}}}{\tilde{\underline{n}}^T \tilde{\underline{n}}} \quad (3.21)$$

mit

$$\|\dot{\underline{n}}\| = \underline{n}^T \cdot \dot{\underline{n}} \quad \text{und} \quad \dot{\underline{n}} = \dot{\underline{u}}_l \times \underline{u}_r + \underline{u}_l \times \dot{\underline{u}}_r \quad (3.22)$$

beschrieben werden kann. Die Änderung der Symmetrieachsen hängt hierbei lediglich von den jeweiligen Winkelgeschwindigkeiten ab:

$$\dot{\underline{u}}_l = \underline{\omega}_l \times \underline{u}_l \quad , \quad \dot{\underline{u}}_r = \underline{\omega}_r \times \underline{u}_r. \quad (3.23)$$

Durch erneute Differenzierung von Gleichung 3.20 kann auf die Beschleunigung zwischen beiden Zylindern geschlossen werden:

$$\ddot{d} = \ddot{\underline{n}}^T \Delta \underline{r}_{rl} + \underline{n}^T \Delta \ddot{\underline{r}}_{rl} + 2(\dot{\underline{n}}^T \Delta \dot{\underline{r}}_{rl}). \quad (3.24)$$

$\Delta \ddot{\underline{r}}_{lr}$ beschreibt hierbei die translatorische Differenzbeschleunigung und $\ddot{\underline{n}}$ die zweite Ableitung des Richtungsvektors welche durch

$$\ddot{\underline{n}} = \frac{\{\ddot{\underline{n}} \|\tilde{\underline{n}}\| + \dot{\underline{n}} \|\dot{\underline{n}}\| - \|\ddot{\underline{n}}\| \tilde{\underline{n}} + \|\dot{\underline{n}}\| \dot{\underline{n}}\} \cdot \{\tilde{\underline{n}}^T \tilde{\underline{n}}\} - \{\dot{\underline{n}} \|\tilde{\underline{n}}\| - \|\dot{\underline{n}}\| \tilde{\underline{n}}\} \cdot 2 \{\dot{\underline{n}}^T \tilde{\underline{n}}\}}{(\tilde{\underline{n}}^T \tilde{\underline{n}}) \cdot (\tilde{\underline{n}}^T \tilde{\underline{n}})} \quad (3.25)$$

mit

$$\|\ddot{\underline{n}}\| = \underline{n}^T \ddot{\underline{n}} + \dot{\underline{n}}^T \dot{\underline{n}} \quad \text{und} \quad \ddot{\underline{n}} = \ddot{\underline{u}}_l \times \underline{u}_r + \underline{u}_l \times \ddot{\underline{u}}_r + 2(\dot{\underline{u}}_l \times \dot{\underline{u}}_r) \quad (3.26)$$

beschrieben werden kann. Für die zweite Ableitung der Symmetrieachsen folgt aus Gleichung 3.23:

$$\ddot{\underline{u}}_l = \dot{\underline{\omega}}_l \times \underline{u}_l + \underline{\omega}_l \times \dot{\underline{u}}_l \quad \text{und} \quad \ddot{\underline{u}}_r = \dot{\underline{\omega}}_r \times \underline{u}_r + \underline{\omega}_r \times \dot{\underline{u}}_r. \quad (3.27)$$

Die aus den Gleichungen 3.19, 3.20 und 3.24 gewonnenen Zustandsgrößen können nun für eine Berechnung des Betrages der Kontaktkraft in der Form

$$\|\underline{F}_K\| = \begin{cases} 0 & \text{für } d \geq 0 \\ F(d, \dot{d}, \ddot{d}, \underline{p}) & \text{für } d < 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

genutzt werden und mit Hilfe des Richtungsvektors \underline{n} in die Richtung des kürzesten Verbindungsvektors ausgerichtet werden. Es gilt somit:

$$\underline{F}_{Kl} = -\underline{F}_{Kr} = \|\underline{F}_K\| \underline{n}. \quad (3.29)$$

In der vorliegenden Arbeit wird per Definition festgelegt, dass bei einem positiven Abstand d beide Zylinder nicht in Kontakt sind. Basierend auf der Übertragungsfunktion F des genutzten Kontaktkraftmodells enthält Vektor \underline{p} die notwendigen Modellparameter wie beispielsweise die Federsteifigkeit oder den Dämpfungsfaktor. Der folgende Abschnitt fasst die in der Literatur vorhandenen und in dieser Arbeit verwendeten Übertragungsfunktionen von Kontaktkraftmodellen zusammen.

3.2.2 Ausgewählte Übertragungsfunktionen von Kontaktkraftelementen

In der Standardliteratur (Goldsmith (1964), Johnson (1987) und Popov (2009)) findet sich eine Vielzahl von unterschiedlichen Kontaktkraftmodellen, welche von einfachen eindimensionalen Stoßmodellen bis hin zu komplexen Finite-Elemente-Modellen (FEM) reichen. Abschnitt 3.2.2 zeigt einige Standard Kontaktkraftmodelle sowie die in der vorliegenden Arbeit genutzte Übertragungsfunktion und die daraus resultierenden Eigenschaften des Kontaktkraftverlaufs. Komplexere Modelle wie beispielsweise Halbraumapproximation oder Randschichtmodelle liegen außerhalb der Betrachtung dieser Arbeit, können jedoch detailliert in Grabner (2003) bzw. Hippmann (2004) nachgelesen werden.

Ein einfaches aus der Literatur unter dem Namen KELVIN-VOIGT (Goldsmith (1964)) bekanntes Kontaktkraftmodell ist die Parallelschaltung einer linearen Feder-Dämpfer-Kombination. Die Übertragungsfunktion der Kraft kann mit Hilfe der Feder-

steifigkeit k und des Dämpfungskoeffizienten D durch

$$F(d, \dot{d}, \underline{p}) = k d + D \dot{d} \quad , \quad k, D \in \underline{p} \quad (3.30)$$

beschrieben werden. Dargestellt über die Eindringtiefe d zeigt Abbildung 3.3 (a) exemplarisch den Hystereseverlauf (Lankarani u. Nikravesch (1990)) der Kontaktkraft des Kelvin-Voigt-Modells. Im direkten Vergleich zur linearen Feder ist deutlich zu erkennen, dass das Modell zu Beginn der Eindringphase einen Sprung in der Kontaktkraft erzeugt (vgl. Abbildung 3.3 (c)). Ebenfalls zeigt sich, dass zum Ende der Kontaktphase eine negative Kontaktkraft, durch welche die Körper gegenseitig angezogen werden, wirkt. Beide Effekte entstehen aufgrund der linearen Abhängigkeit von der Kontakgeschwindigkeit \dot{d} und sind physikalisch nicht sinnvoll⁶. Das im Gegensatz dazu von HUNT und CROSSLEY (Hunt u. Crossley (1975)) entwickelte Kontaktkraftmodell basiert auf dem nicht linearen Federmodell von HERTZ (Hertz (1881)) und ermöglicht durch die Berücksichtigung der Eindringtiefe d im positions- als auch im geschwindigkeitsabhängigen Summanden eine stetig ansteigende und abfallende Kontaktkraft.

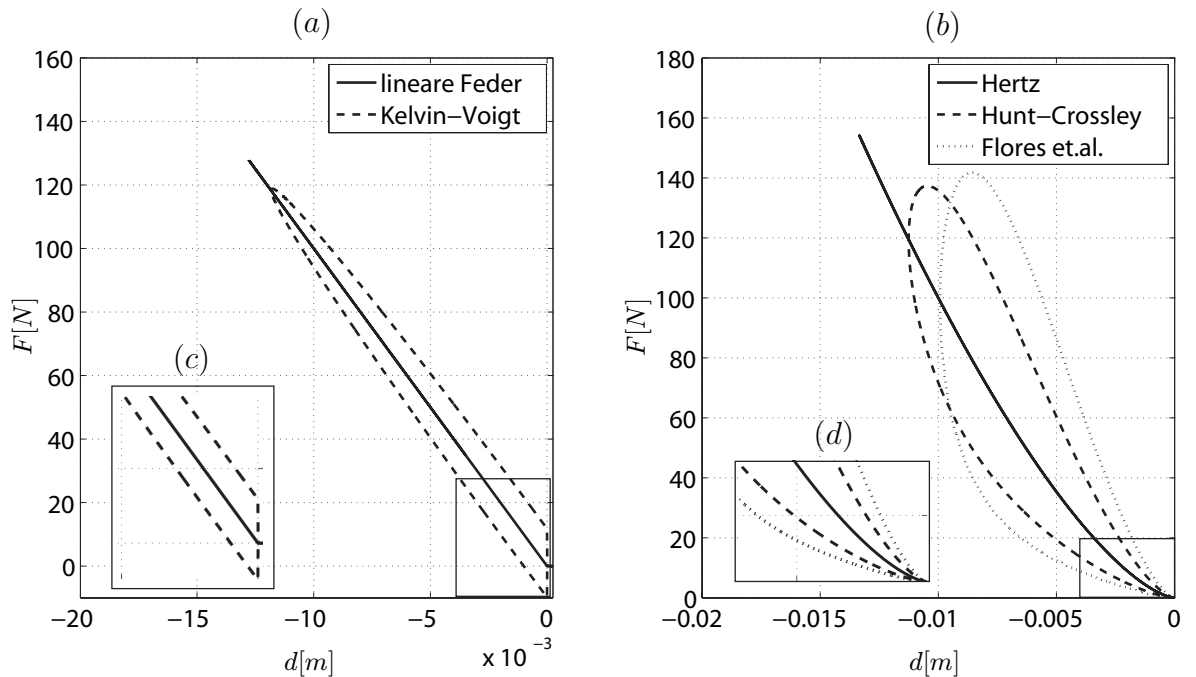


Abbildung 3.3: Darstellung der Kraftverläufe von Kontaktkraftmodellen unterschiedlicher Komplexität (a), (b). Zoom der Kontaktkraftverläufe um den Nullpunkt (c), (d).

⁶In der vorliegenden Arbeit werden adhäsive Kräfte (Popov (2009)) aufgrund von Kleber, Schmierung oder ähnlichem nicht berücksichtigt.

Die Übertragungsfunktion kann mit Hilfe des Hysteresedämpfungsfaktors

$$\chi = \frac{3 (1 - e) k}{2 \dot{d}^-} \quad , \quad k, e \in \underline{p} \quad (3.31)$$

durch

$$F(d, \dot{d}, \underline{p}) = k \cdot d^n + \chi d^n \dot{d} \quad , \quad k, n \in \underline{p} \quad (3.32)$$

dargestellt werden. Hierbei beschreibt k , ähnlich zum Kelvin-Voigt-Modell, die Federsteifigkeit, n den Exponenten der Eindringtiefe, e die Stoßzahl und \dot{d}^- die für jeden Kontaktvorgang neu zu ermittelnde Kontaktgeschwindigkeit zum Startzeitpunkt des Kontaktes. Abbildung 3.3 (b) zeigt exemplarisch die Kontaktkraft des Hunt-Crossley-Modells im Vergleich zum nichtlinearen Federmodell von Hertz ($\chi = 0$). Im direkten Vergleich zu Abbildung (c) ist in der Detaildarstellung (d) zu erkennen, dass die Kontaktkraft, trotz der Berücksichtigung von Dämpfung, bei einem Wert von Null beginnt, stetig ansteigt und abfällt, und dass die Hystereseschleife bei einem Wert von Null endet. Dies ermöglicht eine physikalisch sinnvolle Abbildung bzw. Simulation der Kontaktkraft. Auf Basis des Hysterese Modells von Hunt und Crossley gibt es eine Vielzahl von Modifikationen (Beispielsweise: Lankarani u. Nikravesh (1990), Lankarani u. Nikravesh (1994)), um das jeweilige gewünschte Modell- bzw. Materialverhalten, beschrieben durch Energieverlust während des Kontaktvorgangs, der Änderungsrate der Kontaktkraft sowie der maximalen Eindringtiefe, zu erreichen.

Eines dieser weiterentwickelten Modelle ist das Hysterese kontaktkraftmodell nach FLORES ET. AL., welches sich für Kontaktpaare mit unterschiedlichen Elastizitäten eignet (Flores u. a. (2011)). Mit Hilfe des modifizierten Hysteresedämpfungsfaktors

$$\chi = \frac{8 (1 - e) k}{5 e \dot{d}^-} \quad , \quad k, e \in \underline{p} \quad (3.33)$$

und Gleichung 3.32 kann die Übertragungsfunktion durch

$$F(d, \dot{d}, \underline{p}) = k \cdot d^n \cdot \left[1 + \frac{8(1-e)\dot{d}}{5 e \dot{d}^-} \right] \quad , \quad k, n, e \in \underline{p} \quad (3.34)$$

dargestellt werden. Hierbei ist die Interpretation der Kontaktkraftparameter identisch zu der aus Gleichung 3.31 bzw. 3.32. Wie in Abbildung 3.3 (b) und (d) dargestellt, zeigt das Modell nach Flores im Vergleich zum Hunt-Crossley Modell einen progressiveren Anstieg der Kontaktkraft sowie eine größere Hystereseschleife und einen damit einhergehenden größeren Energieverlust während des Kontaktvorgangs. Da die Schiene (Stahl) und das Rad (Kern: Stahl, Bandage: Polyurethan) eines Achterbahnfahrzeu-

ges unterschiedliche Elastizitäten aufweisen, bietet sich die in Gleichung 3.34 gezeigte Übertragungsfunktion für die Modellierung der Rad-Schienen-Kontaktkraft an. In der vorliegenden Arbeit werden somit keine weiteren Hysteresemodelle betrachtet. Ein detaillierter Vergleich weiterer Hysteresekontaktkraftelemente ist in Machado u. a. (2012) zu finden.

3.2.3 Roll-/ Gleitreibungsmodell

Das in den vorherigen Abschnitten eingeführte Kontaktmodell ermöglicht die Simulation von Normalkräften zwischen Rad und Schiene, jedoch nicht die Berücksichtigung von tangential zum Rad wirkenden Reibkräften und den daraus auf das Rad wirkenden Reibmomenten. Ebenfalls werden durch die nicht vorhandene Rotation der Radmasse Coriolis- und Zentrifugalkräfte sowie gyroscopische Terme vernachlässigt. Aus diesem Grund wird im folgenden Abschnitt das eingeführte Kontaktmodell mit einem Roll- bzw. Gleitreibungsmodell gekoppelt. Das daraus resultierende Rad-Schiene-Kontakt- und Reibkraftmodell (im Folgenden Rad-Schiene-Modell) ist Grundlage des in Abschnitt 3.3 gezeigten Gesamtfahrzeugmodells. Abbildung 3.4 zeigt die am Rad-Schiene-Modell möglichen translatorischen und rotatorischen Geschwindigkeiten. Während das Rad in Abbildung 3.4 (a) keine Rotationsgeschwindigkeit und somit eine konstante Orientierung im Verhältnis zu der Schiene besitzt, ändert sich die Orientierung des Rades in Abbildung (b) im Verhältnis zu \mathcal{K}_l aufgrund der Änderung von φ . Im Falle

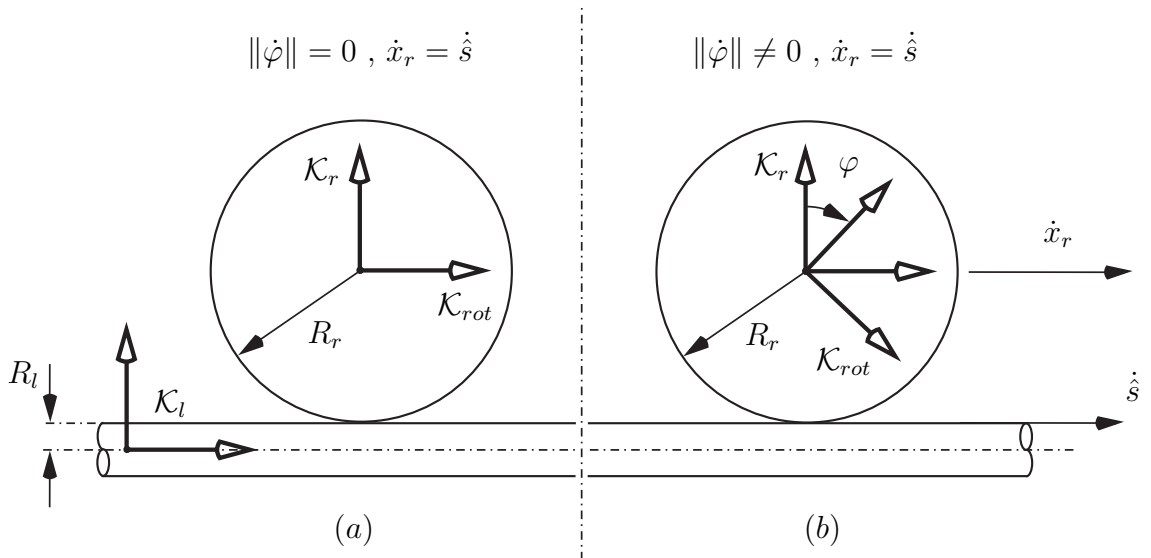


Abbildung 3.4: Nicht rotierendes (a) - rotierendes (b) Rad auf Schienenzyylinder

der Rotation des Rades kann grundsätzlich zwischen den Zuständen

$$\text{Rollen :} \quad y+: \dot{s} + \dot{\varphi} R_r = 0 \quad , \quad y-: \dot{s} - \dot{\varphi} R_r = 0 \quad (3.35)$$

$$\text{Gleiten :} \quad y+: \dot{s} + \dot{\varphi} R_r \neq 0 \quad , \quad y-: \dot{s} - \dot{\varphi} R_r \neq 0 \quad (3.36)$$

unterschieden werden. Hierbei beschreibt \dot{s} die auf die Oberfläche des Schienenzylinders in Richtung der Symmetrieachse bzw. Tangente projizierte translatorische Mittelpunktsgeschwindigkeit der Radnabe \dot{x}_r (vgl. Gleichung 3.48), $\dot{\varphi}$ die Rotationsgeschwindigkeit und R_r den Radius des Rades. Wie in Abbildung 3.6 (a) dargestellt, liegt im Fall des Gleitens der Momentanpol M auf einer vertikalen Linie (im Folgenden Momentanpollinie), die durch die Radnabe und den Radaufstandspunkt (im Folgenden Kontaktpunkt) verläuft und somit im rechten Winkel zum Untergrund steht. Da in der vorliegenden Arbeit lediglich geschleppte Räder ohne eigenen Antrieb zum Einsatz kommen, befindet sich der Momentanpol immer unterhalb des Radaufstandspunktes (Schramm u. a. (2014)). Abbildung 3.5 (a) zeigt die Lage des Momentanpols M im Fall des Rollens auf der Momentanpollinie genau im Kontaktpunkt. Aus der Lage des Momentanpols folgt somit eine kinematische Bindung in Form einer Differentialgleichung erster Ordnung, welche die Anzahl der Freiheitsgrade des Gesamtsystems verringert, durch

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{s}}{R} \quad (3.37)$$

beschrieben werden kann, und vom Integrator zusätzlich zu den Bewegungsgleichungen (vgl. Gleichung 3.6) gelöst werden muss.

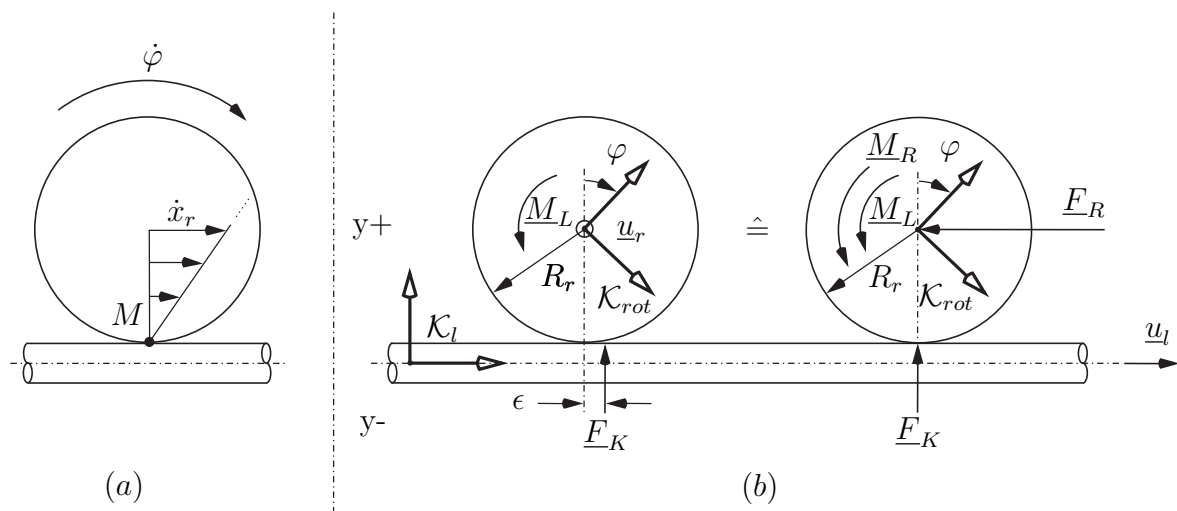


Abbildung 3.5: Geschwindigkeiten (a) - Kräfte und Momente (b) am rollenden Rad

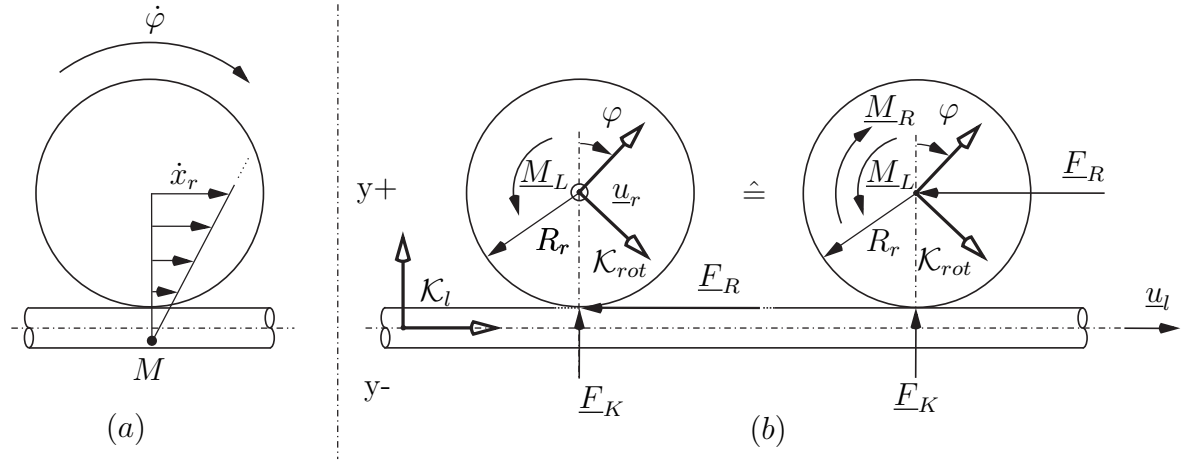


Abbildung 3.6: Geschwindigkeiten (a) - Kräfte und Momente (b) am gleitenden Rad

Abbildung 3.5 (b) zeigt die im Fall des Rollens am Rad und der Radnabe wirkenden Kräfte und Momente. \underline{M}_L beschreibt hierbei ein zu der Rotationsgeschwindigkeit des Rades proportionales Lagerreibungsmoment, welches durch

$$\underline{M}_L = -(\mu_L \dot{\varphi}) \cdot \underline{u}_r \quad (3.38)$$

mit Hilfe des Lagerreibungskoeffizienten μ_L beschrieben werden kann. ϵ ist die horizontale Verschiebung zwischen Momentanpol- und Wirkungsline der Normalkraft, welche beim Rollen durch das Abbremsen und Beschleunigen des Latsches und der daraus resultierende vergrößerten Pressung im vorderen bzw. verkleinerten Pressung im hinteren Bereich des Latsches zustande kommt (Schramm u. a. (2010)). Hieraus folgt

$$\underline{M}_R = (F_K \epsilon) \cdot \underline{u}_r \quad (3.39)$$

als zusätzliches Moment am rollenden Rad sowie eine Kraft

$$\underline{F}_R = - \left(\frac{M_R}{R_r} \right) \cdot \underline{u}_l \quad (3.40)$$

auf die Radnabe.

Im Gegensatz dazu werden im Zustand des Gleitens die Freiheitsgrade des Rades durch keine zusätzliche Bindungsgleichung beschränkt. Durch die Relativgeschwindigkeit im Kontaktpunkt entsteht jedoch eine tangentielle Reibkraft, welche durch

$$\underline{F}_R = \begin{cases} 0 & \text{für } F_K = 0 \\ -(F_R(F_K, \underline{p})) \cdot \underline{u}_l & \text{für } F_K \neq 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

beschrieben werden kann. In der vorliegenden Arbeit wird für die Berechnung der Reibkraft das COULOMB'sche (Historischer Verweis: Coulomb (1785)) Reibkraftgesetz unter der Verwendung des Gleitreibungskoeffizienten μ genutzt, welches sich über eine Kraftübertragungsfunktion der Form

$$F_R(F_K, \underline{p}) = \mu F_K \quad , \quad \mu \subset \underline{p}. \quad (3.42)$$

darstellen lässt. Durch die in Abbildung 3.6 (b) dargestellte Parallelverschiebung der Reibkraft \underline{F}_R auf die Radnabe, kann ein von der Normalkraft abhängiges Moment der Form

$$\underline{M}_R = (\text{sign}(\dot{s} + \dot{\varphi} R) F_R R) \cdot \underline{u}_r \quad (3.43)$$

auf das Rad erzeugt werden, welches für eine Rotation des Rades sorgt. Das Lagermoment \underline{M}_L ist identisch zu Gleichung 3.38. Das in der vorliegenden Arbeit genutzte einfache Coulomb'sche Reibkraftmodell ermöglicht einen stetigen Übergang zwischen den eingeführten Zuständen Rollen und Gleiten. Die Untersuchungen komplexerer Reibkraftmodelle liegt außerhalb des Fokus der vorliegenden Arbeit, kann jedoch detailliert in Eickhorn (2012) nachgelesen werden.

3.2.4 Begleitender Schienenzyylinder entlang eines Splines

Das in den Abschnitten 3.2.1, 3.2.2 und 3.2.3 eingeführte Rad-Schiene-Modell ermöglicht die Berechnung einer Kontakt- und Reibkraft zwischen zwei Zylindern, welche durch die jeweiligen Richtungsvektoren \underline{u}_r und \underline{u}_l sowie die Radien R_r bzw. R_l definiert sind.

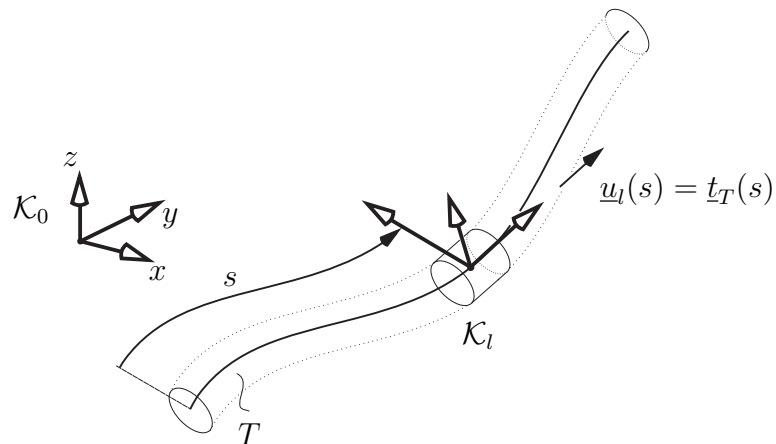


Abbildung 3.7: Interpretation einer Achterbahnschiene mit rotationssymmetrischen Querschnitt als an einer Bahnkurve T entlang verschiebbarer Zylinder

Wie in Abbildung 3.7 dargestellt, kann die Schiene einer Achterbahn als Zylinder, welcher sich entlang einer raumfesten Bahnkurve T mit einem von der Bahnkoordinate s abhängigen Richtungsvektor $\underline{u}_l(s)$ bewegt, interpretiert werden (Malessa u. Kecs-keméthy (2012a)). Hierbei ist der Richtungsvektor $\underline{u}_l(s)$ des Schienenzylinders identisch zum Tangentenvektor $\underline{t}_T(s)$ der Bahnkurve T (vgl. Abschnitt 2.2). Zur genauen Berechnung des minimalen Abstands (vgl. Gleichung 3.19) muss somit zu jedem Zeitpunkt der Simulation der Schienenzylinder passend positioniert und somit die Position, abhängig von der Bahnkoordinate s auf der Bahnkurve ermittelt werden. Hierzu wurden in der vorliegenden Arbeit zwei unterschiedliche Ansätze untersucht.

Wie in Abbildung 3.8 (a) dargestellt, nutzt der erste Ansatz eine geometrische Bindungsgleichung der Form

$$\phi(\underline{q}, s) = \Delta \underline{r}_{lr}^T \underline{t}_T(s) = 0. \quad (3.44)$$

Hiermit wird zu jedem Zeitschritt der dynamischen Simulation durch ein iteratives Verfahren (Beispielsweise: NEWTON-RAPHSON) ein zur aktuellen Bahnkoordinate s notwendiger Korrekturwert s^* ermittelt, sodass der Verbindungsvektor $\Delta \underline{r}_{lr}$ und der Tangentenvektor $\underline{t}_T(s)$ der Bahnkurve T einen rechten Winkel einschließen.

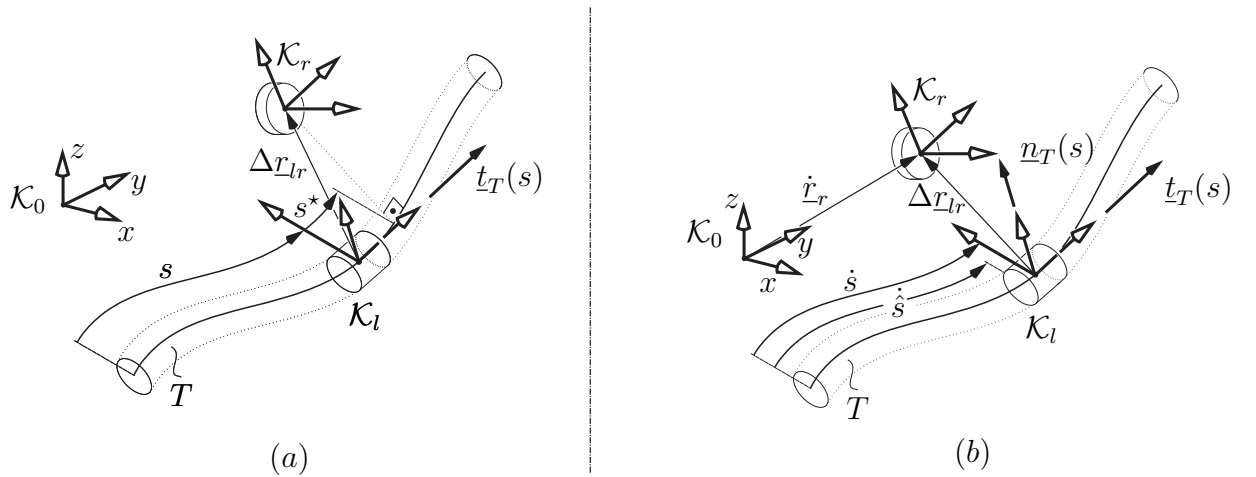


Abbildung 3.8: Positionierung des Schienenzylinders durch: geometrische Bindung (a) - Differentialgleichung (b)

Als Basis für den in Abbildung 3.8 (b) gezeigten zweiten Ansatz dient die Projektion der translatorischen Radgeschwindigkeit auf die Tangente $\underline{t}_T(s)$ der Bahnkurve T (Shabana u. a. (2004)). Die hierfür notwendige Zeitableitung von Gleichung 3.44 kann durch

$$\frac{\partial \phi(\underline{q}, s)}{\partial t} = \Delta \dot{\underline{r}}_{lr}^T \underline{t}_T(s) + \Delta \underline{r}_{lr}^T \dot{\underline{t}}_T(s) = 0 \quad (3.45)$$

dargestellt werden. Hierbei kann die entstehende Differenzgeschwindigkeit zwischen beiden Zylindern durch die translatorische Geschwindigkeit des Rades sowie die Projektion der Bahngeschwindigkeit mit Hilfe von

$$\Delta \dot{\underline{r}}_{lr} = \dot{\underline{r}}_r - \dot{\underline{r}}_l = \dot{\underline{r}}_r - \underline{t}_T(s) \dot{s} \quad (3.46)$$

beschrieben werden. Die notwendige Änderung der Tangente lässt sich durch

$$\dot{\underline{t}}_T(s) = \frac{d \underline{t}_T(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \kappa \underline{n}_p \dot{s} \quad (3.47)$$

darstellen. Hierbei beschreibt κ die Krümmung der Bahnkurve T (vgl. Abschnitt 2.2). Aus Gleichung 3.45, 3.46 und 3.47 folgt somit für die Bahngeschwindigkeit

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \underline{t}_T(s)^T \dot{\underline{r}}_r & \rho &\rightarrow \infty \\ \dot{s} &= \frac{\underline{t}_T^T(s) \dot{\underline{r}}_r}{1 - \left(\frac{1}{\rho - R_l} \right) \underline{n}_p^T \Delta \underline{r}_{lr}} & \frac{1}{\rho} &\neq 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Die in Gleichung 3.48 dargestellte Differentialgleichung erster Art wird ähnlich wie Gleichung 3.37 zusätzlich zu den Bewegungsgleichungen vom Integrator gelöst und sorgt damit für einen im Rahmen der Integrationstoleranzen bestmöglich positionierten Schienenzylinder.

Zu dem Vergleich beider Verfahren wurde in der vorliegenden Arbeit das in Abbildung 3.9 dargestellte vereinfachte Modell einer Starrachse genutzt. Hierbei handelt es sich um eine an das Koordinatensystem \mathcal{K}_K angehaftete Masse, welche mit masselosen Stäben an zwei Rad-Schiene-Kontaktelementen ohne Roll- oder Gleitreibung (vgl. Abschnitt 3.2.1) gekoppelt ist. Die für die Simulation notwendigen Modellgrößen des Minimalbeispiels sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst. Die Positionen s_L und s_R der an die \mathcal{K}_{lR} bzw. \mathcal{K}_{lL} angehefteten Schienenzylinder werden mit Hilfe der in diesem Abschnitt eingeführten Methoden bestimmt.

Größe	Masse	Trägheitsmoment			Federsteifigkeit	Geschw.	Länge
Formelz.	m	Θ_x	Θ_y	Θ_z	k	\dot{s}_c	s_L/s_R
Einheit	[Kg]	[Kg m^2]	[Kg m^2]	[Kg m^2]	[N/m]	[m/s]	[m]
Zahlwert	10.0	1.0	1.0	1.0	2000	10	100

Tabelle 3.1: Modellgrößen des Minimalbeispiels

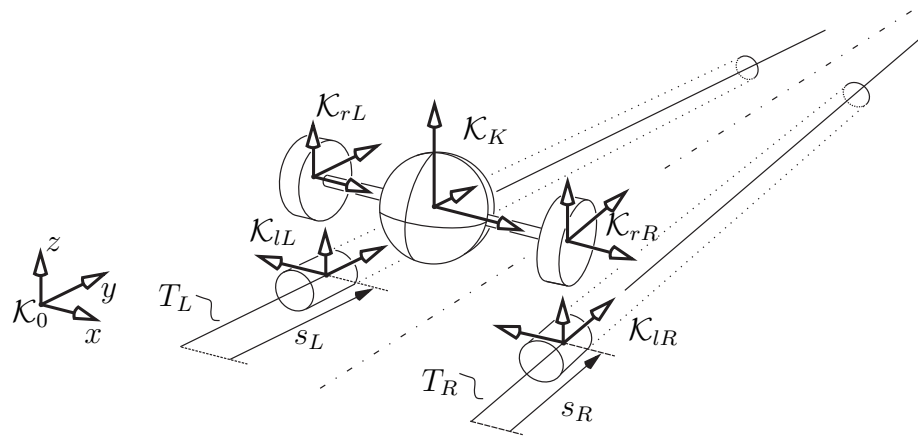


Abbildung 3.9: Minimalbeispiel: Vergleich Rechenzeit. Positionierung des Schienenzylinders durch geometrische Bindung - Integration einer Differentialgleichung

Tabelle 3.2 zeigt die benötigten CPU-Rechenzeiten⁷ in Abhängigkeit der gewählten Integrationstoleranzen für die vollständige dynamische Simulation inklusive der Positionierung der zwei an K_{lR} bzw. K_{lL} angehefteten Schienenzylinder. Die Kontaktkraft zwischen Rad (K_{rR} , K_{rL}) und Schiene (K_{lR} , K_{lL}) wird durch das in Abschnitt 3.2.1 dargestellte Rad-Schiene-Kontaktmodell erzeugt. Als Übertragungsfunktion $F(d, \dot{d}, \ddot{d}, p)$ wird eine lineare Feder (vgl. Abbildung 3.3 (a)) genutzt. Der Vergleich zeigt, dass der in Gleichung 3.48 gezeigte, auf einer Differentialgleichung basierende, zweite Ansatz eine um einen Faktor von $\approx 3-4$ kürzere CPU-Rechenzeit für die Positionierung während der Simulation benötigt. Des Weiteren ist zu erkennen, dass der Rechenzeitvorteil bei strengeren Integrationstoleranzen weiter zunimmt. Die Qualität der Positionsbestimmung ist bei beiden gewählten Ansätzen vergleichbar. Aus diesen Gründen wird in der vorliegenden Arbeit die Positionierung des Schienenzylinders mit Hilfe der in Gleichung 3.48 dargestellten Differentialgleichung realisiert.

#	Integrator toleranzen		Bindung (a)	DGL (b)	Faktor (a)/(b)
	Abs [-]	Rel [-]	Zeit [s]	Zeit [s]	
1	1e-4	1e-4	9.1	2.9	3.13
2	1e-5	1e-5	10.3	3.0	3.43
3	1e-6	1e-6	10.8	3.05	3.54
4	1e-7	1e-7	11.9	3.1	3.84
5	1e-8	1e-8	12.2	3.1	3.94

Tabelle 3.2: Vergleich: Rechenzeit mit geometr. Bindung (a) - Differentialgleichung (b)

⁷Alle im Folgenden gezeigten Rechenzeiten basieren auf einem Intel(T) Core(TM) i7 – 2640M CPU @ 2.8GHz Prozessor.

3.3 Modellierung des genutzten Gesamtfahrzeugmodells

Der folgende Abschnitt beschreibt die Struktur des in der vorliegenden Arbeit genutzten Fahrzeugmodells. Hierbei wird zunächst auf die Wahl des Bezugssystems und die daraus resultierende Darstellung der Freiheitsgrade eingegangen. Anschließend daran zeigt der Abschnitt den Aufbau des Fahrzeugmodells, beginnend bei einer starren Einzelachse über die Kopplung dieser zu einem Einzelfahrzeug, bis hin zur Darstellung des in der vorliegenden Arbeit genutzten Tandemfahrzeuges.

3.3.1 Aufspaltung der Freiheitsgrade für mögliche Teillinearisation

Ein starrer ungebundener Körper K mit Masse und Trägheit besitzt im euklidischen drei-dimensionalen Raum \mathbb{R}^3 (im Folgenden \mathbb{R}^3) im Bezug auf ein globales Koordinatensystem \mathcal{K}_0 drei rotatorische und drei translatorische Freiheitsgrade. Wird dieser Körper mit einem numerischen Ansatz, welcher auf verallgemeinerten- bzw. Minimalkoordinaten (vgl. Abschnitte 3.1.2, 3.1.3) basiert, beschrieben, so können diese Freiheitsgrade als eine Kombination von drei Schub- und drei Drehgelenken interpretiert werden, welche sich, wie in Abbildung 3.10 gezeigt, mit einem Vektor der generalisierten Koordinaten der Form

$$\underline{q}_K = \begin{bmatrix} s_{Kx} & s_{Ky} & s_{Kz} & \varphi_K & \theta_K & \psi_K \end{bmatrix}^T \quad (3.49)$$

beschreiben lassen. Daraus folgt, dass die Position und Orientierung von Körper K in Abhängigkeit von \underline{q}_K durch den Ortsvektor

$$\underline{r}_K(\underline{q}_K) = \begin{bmatrix} s_{Kx} & s_{Ky} & s_{Kz} \end{bmatrix}^T \quad (3.50)$$

und die Rotationsmatrix⁸

$${}^0\mathbf{R}_K(\underline{q}_K) = \text{Rot}[x, \varphi_K] \cdot \text{Rot}[y, \theta_K] \cdot \text{Rot}[z, \psi_K] \quad (3.51)$$

beschrieben werden kann. Die in Abbildung 3.10 gezeigte Beschreibung des starren, ungebundenen Körpers K kann genutzt werden, um die Bewegung des in der vorliegenden Arbeit simulierten Achterbahnfahrzeugmodells relativ zu \mathcal{K}_0 zu beschreiben. Hierbei repräsentiert Körper K im einfachsten Fall das aus Abbildung 3.9 bekannte

⁸Für die Reihenfolge der Drehwinkel der Rotationsmatrix wurden zur Veranschaulichung in Gleichung 3.51 die KARDAN-Winkel gewählt. Grundlage der in Simulationsumgebung M_UBILE genutzten Rotationsmatrizen sind jedoch die EULER-RODRIGUES Quaternionen. Zur vereinfachten Darstellung von Rotationsmatrizen wird im Folgenden allgemein $\text{Rot}(\varphi, \theta, \psi)$ genutzt.

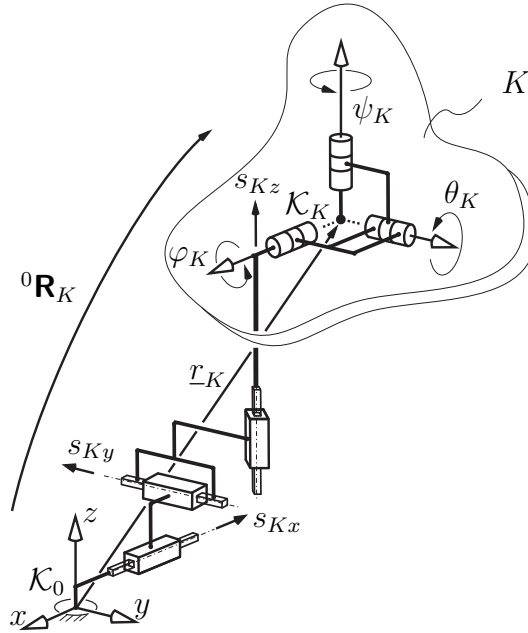


Abbildung 3.10: Freiheitsgrade von Körper K repräsentiert durch eine Kombination von Schub- und Drehgelenken

Modell einer Starrachse, welche sich frei im \mathbb{R}^3 bewegen kann, sich jedoch aufgrund der aus den Rad-Schiene-Modell entstehenden Kräften entlang der Schienengeometrie T_l und T_r bewegt. Bei der Bewegung der Starrachse kann es hierbei aufgrund der Geometrie und der Länge der zu modellierenden Achterbahnstrecke vorkommen, dass die verallgemeinerten Koordinaten Werte im Bereich von

$$\begin{aligned} 0 \text{ m} &\leq \|s_{Kx}\|, \|s_{Ky}\|, \|s_{Kz}\| \leq 1000 \text{ m} \quad \text{und} \\ 0 \text{ rad} &\leq \|\varphi_K\|, \|\theta_K\|, \|\psi_K\| \leq 2 \pi \text{ rad} \end{aligned} \quad (3.52)$$

annehmen. Die für die im Folgenden durchgeführte Schwingungsanalyse relevanten Relativbewegungen zwischen Fahrzeug und Schiene, welche aufgrund der Rad-Schiene-Kontakte entstehen, können hierbei im Vergleich zu den in Gleichung 3.52 gezeigten Dimensionen um einen Faktor von bis zu 10000 geringer ausfallen und somit in den verallgemeinerten Koordinaten q_K schwer zu identifizieren sein. Darüber hinaus muss der Größenunterschied bei der Wahl der Toleranzen des Integrationsverfahrens berücksichtigt werden und kann zu einer schlechten Balance zwischen Ergebnisgüte und Rechenzeit führen. Aus diesem Grund werden, wie in Abbildung 3.11 (a) dargestellt, in der vorliegenden Arbeit die Relativbewegungen nicht auf das globale Koordinatensystem \mathcal{K}_0 , sondern auf ein lokales auf einer weiteren Bahnkurve T_c (im Folgenden Center-Spline) mitgeführtes Koordinatensystem \mathcal{K}_b bezogen (Sugiyama u. Shabana (2007)).

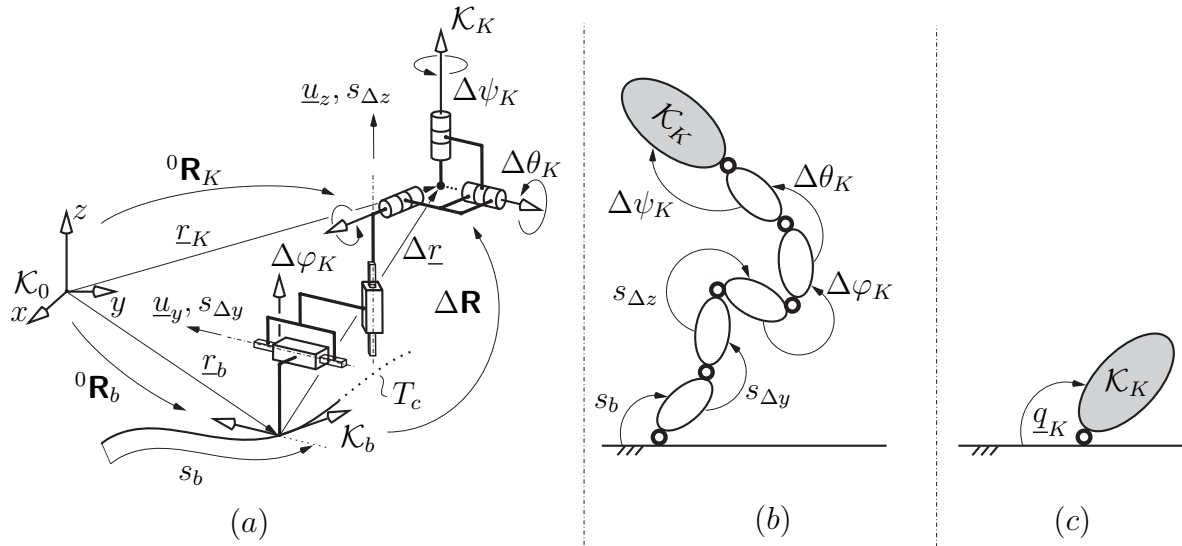


Abbildung 3.11: Anbindung eines starren Körpers K an den Center-Spline (a) - topologisches Modell der Anbindung (b) - Zusammenfassung des topologischen Modells (c)

Dies ermöglicht eine Unterteilung der generalisierten Koordinaten von Körper K in

$$\underline{q}_K = \begin{bmatrix} \underline{q}_b^T & \underline{q}_\Delta^T \end{bmatrix}^T \quad (3.53)$$

mit

$$\underline{q}_b = \begin{bmatrix} s_b \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{q}_\Delta = \begin{bmatrix} s_{\Delta y} & s_{\Delta z} & \Delta\varphi_K & \Delta\theta_K & \Delta\psi_K \end{bmatrix}^T \quad (3.54)$$

in den Intervallen

$$\begin{aligned} 0 \text{ m} &\leq \|s_b\| && \leq 1000 \text{ m}, \\ 0 \text{ rad} &\leq \|\varphi_b(s_b)\|, \|\theta_b(s_b)\|, \|\psi_b(s_b)\| && \leq 2 \pi \text{ rad}, \\ 0 \text{ m} &\leq \|s_{\Delta y}\|, \|s_{\Delta z}\| && \leq 0.1 \text{ m} \quad \text{und} \\ 0 \text{ rad} &\leq \|\Delta\varphi_K\|, \|\Delta\theta_K\|, \|\Delta\psi_K\| && \leq 0.1 \pi \text{ rad}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Aus der Unterteilung folgt, dass der Ortsvektor zu Körper K mit zwei Vektoren in Abhängigkeit von den generalisierten Koordinaten \underline{q}_b und \underline{q}_Δ durch

$$\underline{r}_K(\underline{q}_b, \Delta\mathbf{q}) = \underline{r}_b(\underline{q}_b) + \Delta\underline{r}(\underline{q}_\Delta) \quad (3.56)$$

dargestellt werden kann. Die Relativbewegungen von Körper K können somit relativ zu \mathcal{K}_b dargestellt werden und sind im in \mathcal{K}_b zerlegten Vektor

$$\Delta^b \underline{r}(\underline{q}_\Delta) = \begin{bmatrix} 0 \\ s_{\Delta y} \\ s_{\Delta z} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

isoliert. Ebenfalls kann durch die Unterteilung der generalisierten Koordinaten die Orientierung von Körper K durch zwei Rotationsmatrizen der Form

$${}^0\mathbf{R}_K(\underline{q}_b, \underline{q}_\Delta) = {}^0\mathbf{R}_b(\underline{q}_b) \cdot \Delta\mathbf{R}(\underline{q}_\Delta). \quad (3.58)$$

dargestellt werden. Die Relativorientierungen sind somit in

$$\Delta\mathbf{R}(\underline{q}_\Delta) = \text{Rot}(\Delta\varphi, \Delta\theta, \Delta\psi) \quad (3.59)$$

enthalten.

Die dargestellte Unterteilung ermöglicht eine von der Bahngeometrie und Schienenlänge unabhängige Analyse der generalisierten Koordinaten \underline{q}_Δ . Durch eine Linearisierung der im Verhältnis zu \underline{q}_b sehr kleinen Werte von \underline{q}_Δ kann eine weitere Rechenzeiterparnis erreicht werden (vgl. Kapitel 6). Die in Abbildung 3.11 (b) und (c) dargestellten topologischen Modelle dienen zur vereinfachten Darstellung der im Folgenden gezeigten Fahrzeugkinematik.

3.3.2 Fahrzeugachse

Die im vorherigen Abschnitt gezeigte Methodik ermöglicht die Anbindung von Körpern an den Center-Spline und somit eine dynamische Simulation entlang einer beliebigen Bahngeometrie bestehend aus T_c , T_l und T_r (vgl. Abschnitt 2.4). Wie in Abbildung 3.12 (a) gezeigt, ist die hierzu genutzte Fahrzeugachse eine Erweiterung der aus Abbildung 3.9 bekannten Starrachse. Aufgrund der an einem Radschild jeweils paarweise angeordneten Räder oberhalb (im Folgenden Laufräder), unterhalb (im Folgenden Gegenräder) und seitwärts (im Folgenden Seitenräder) der Schiene umfasst die Achse die Schiene und wird somit auch in Streckenabschnitten mit komplexen dreidimensionalen Trajektorien auf der Schiene gehalten. Die in Abbildung 3.12 gezeigten Winkel α_R und α_L ermöglichen eine separate Verdrehung der Radschilder relativ zur Starrachse und somit eine zwangsfreie Bewegung selbst bei unterschiedlichen Krümmungen der Trajektorien T_l und T_r . Die Anzahl der Freiheitsgrade der in Abbildung 3.12 (a) abgebildeten

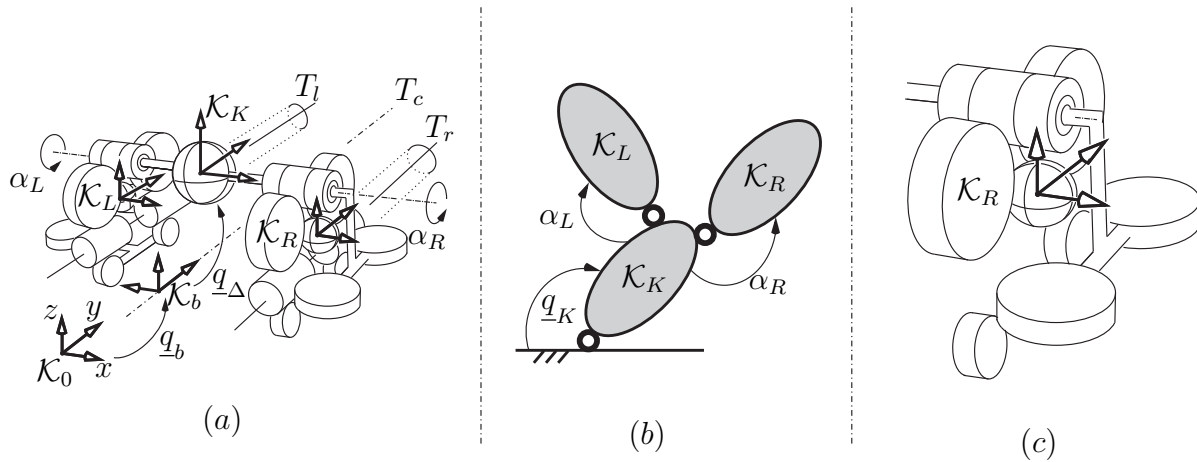


Abbildung 3.12: Skizze (a) - topologisches Modell (b) einer Fahrzeugachse mit Radschildern. Detaildarstellung eines Radschildes mit Lauf-, Seiten- und Gegenrädern (c)

vollständigen Fahrzeugachse beträgt somit acht. Mit den weiteren Freiheitsgraden für jedes rotierende Rad besitzt die Massenmatrix (vgl. Gleichung 3.6) der Fahrzeugachse inklusive beider Radschilder somit eine Größe von 20×20 . Hierzu kommen weitere zwölf Differentialgleichungen zur Positionierung der zu jedem Rad gehörenden Schienenzylinder (vgl. Gleichung 3.48). Je nach Zustand (Rollen / Gleiten) jedes Rades müssen bis zu sechs weitere Differentialgleichungen (vgl. Gleichung 3.37) vom Integrator gelöst werden. Somit liegt, abhängig vom Zustand, die Anzahl der zu integrierenden Differentialgleichungen für jede vollständige Fahrzeugachse inklusive Radschildern zwischen 32 und 38.

3.3.3 Kopplung von Fahrzeugachsen

In der Realität besteht ein Achterbahnfahrzeug aus zwei oder mehr Achsen, die durch ein Chassis, welches Platz für die Passagiere bietet, gekoppelt wird. Um die Kopplung mit dem in der vorliegenden Arbeit gewählten numerischen Ansatz zu realisieren, können grundsätzlich zwei verschiedene Ansätze verfolgt werden. Bei dem in Abbildung 3.13 (a) gezeigten Modell wird die vordere zweite Achse über ein Chassis, bestehend aus drei Drehgelenken sowie einer starren Verbindungsstange mit Masse und Trägheit, mit der hinteren Achse gekoppelt und so als offene Schleife bzw. in Baumstruktur (Kecs kemethy u. Hiller (1993)) dargestellt. Das so entstehende Fahrzeugmodell kann ohne weitere Modifikationen in die in der vorliegenden Arbeit genutzte Simulationsumgebung MIBILE (vgl. Abschnitt 3.1.3) implementiert werden. Das in Abbildung 3.13 (b) dargestellte topologische Modell zeigt vereinfacht die zusätzlichen Freiheitsgrade

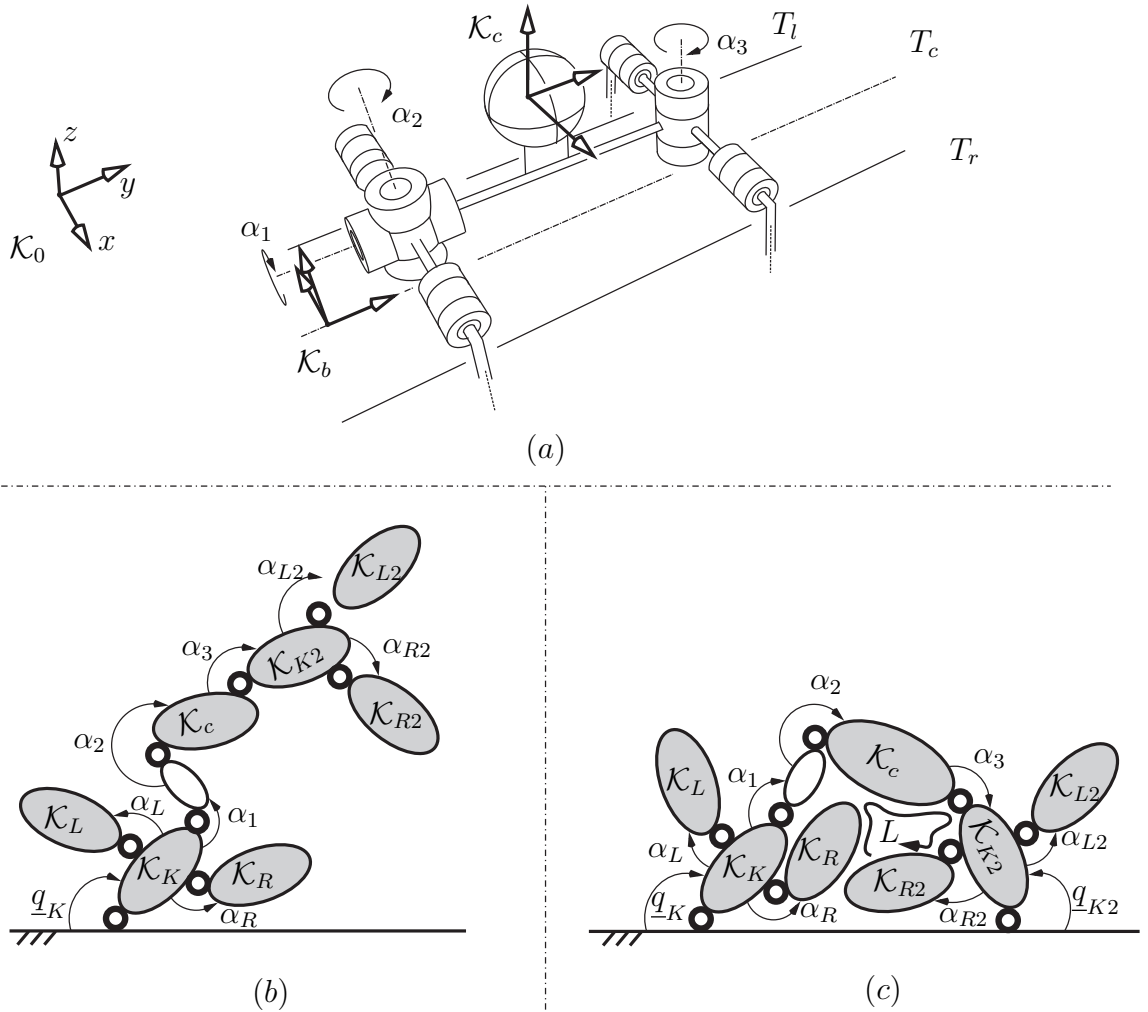


Abbildung 3.13: Kopplung von Achsen: Skizze der gekoppelten Achsen (a) - topologisches Modell der gekoppelten Achsen mit offener (b) - geschlossener Schleife (c)

der durch ein Chassis gekoppelten Fahrzeugachsen.

Im Gegensatz zu der zuvor beschriebenen Modellierung in Baumstruktur kann die vordere Achse auch über ein zweites Bezugssystem \mathcal{K}_{b2} an den Center-Spline T_c gekoppelt werden (vgl. Abbildung 3.11). Durch die Verbindung beider Achsen mit dem Chassis entsteht dann das in Abbildung 3.13 (c) gezeigte topologische Modell mit einer geschlossenen Schleife L , welche in der genutzten Simulationsumgebung M \square BILE gesondert berücksichtigt werden muss. Um das geschlossene Modell simulieren zu können, muss zunächst durch einen Schnitt ein System mit Baumstruktur bzw. offener Schleife erstellt werden. Das so entstehende Modell kann dann im ersten Schritt wie ein offenes System behandelt werden. Im zweiten Schritt muss dann in jedem Integrationsschritt durch eine dem Schnitt entgegenwirkende Schließbedingung der ursprüngliche Zustand des geschlossenen Systems wieder hergestellt werden. Die Berücksichtigung der zusätz-

lichen Schließbedingung erhöht die Anzahl der notwendigen Iterationen. Zum Vergleich beider Modelle wird das aus Abschnitt 3.2.4 bekannte Modell einer einfachen Starrachse genutzt und mit den beiden in diesem Abschnitt beschriebenen Ansätze zu einem Fahrzeugmodell mit zwei Starrachsen und einem einfachen masselosen Chassis ohne weitere Freiheitsgrade erweitert. Zur Lösung der notwendigen Schließbedingung wird ein implizites Lösungsverfahren (Routine: HYBRJ aus MINPACK (Moré u. a. (1980))) genutzt. Als Trajektorie dienen, wie in Abschnitt 3.2.4, zwei 100 m lange Geraden. Der Vergleich in Tabelle 3.3 zeigt deutlich, dass unabhängig von den gewählten Toleranzen, die im geschlossenen Modell zusätzlich zu berücksichtigende Schließbedingung die Lösung der Modellgleichungen, selbst im Falle des stark vereinfachten Fahrzeugmodells um $\approx 20\%$ verlangsamt. Aus diesem Grund werden in der vorliegenden Arbeit alle Einzelfahrzeug- sowie das im Folgenden gezeigte Tandemmodell des Achterbahnfahrzeuges in Baumstruktur bzw. als offene Schleifen ohne zusätzliche Schließbedingungen ausgeführt. Für eine detaillierte Beschreibung von geschlossenen Systemen sei auf Woernle (2011) verwiesen.

Unabhängig von der gewählten Modellierung ermöglichen die in Abbildung 3.13 gezeigten zusätzlichen Freiheitsgrade α_1 , α_2 und α_3 des Chassis eine Lenkbewegung der Vorderachse sowie eine Schwenkbewegung der Vorder- und Hinterachse relativ zu einander. Dies ermöglicht das Befahren von komplexen dreidimensionalen Trajektorien. Die Anzahl der Freiheitsgrade des dargestellten Fahrzeugmodells beträgt nun 13. Hierzu kommen weitere zwölf für jedes rotierende Rad der vorderen Achse. Somit steigt die Größe der Massenmatrix auf 37×37 . Hierzu kommen weitere Differentialgleichungen für die Positionierung der Schienenzyylinder bzw. für rollende Räder. Somit liegt die Anzahl der zu integrierenden Differentialgleichungen zwischen 61 und 73.

#	Integrator tolerances		Geschlossene Schleife (a)	Offene Schleife (b)	Factor
	Abs [-]	Rel [-]	Zeit [s]	Zeit [s]	
1	1e-4	1e-4	5.51	4.67	1.18
2	1e-5	1e-5	7.13	6.0	1.19
3	1e-6	1e-6	7.38	6.21	1.19
4	1e-7	1e-7	7.85	6.77	1.16
5	1e-8	1e-8	8.03	6.8	1.18

Tabelle 3.3: Vergleich: Rechenzeit für Fahrzeugmodell als geschlossene- (a) - offene (b) Schleife

notwendigen Massen sowie Trägheiten der Achsen, Chassis sowie der Koppelstange aus realen Messungen⁹ bzw. mit Hilfe von CAD Programmen aus 3D Konstruktionszeichnungen abgeleitet wurden.

3.4 Auswahl eines geeigneten Integrationsverfahrens

Achterbahnkonstruktionen mit einer Schienenlänge von über einem Kilometer und daraus resultierenden Fahrzeiten von über 100 Sekunden gehören heutzutage weltweit zum Standard (www.coastersandmore.de). Unter Berücksichtigung realer Anfangsbedingungen sowie Luftwiderstands- und Reibungsparameter der Räder ist die Geschwindigkeit und die daraus resultierende Simulationszeit eines Achterbahnfahrzeugmodells nahezu identisch zur Realität. Im Vergleich zu Standard-Mehrkörpersimulationsanwendungen wie beispielsweise der kinematischen und dynamischen Simulation von Kraftfahrzeuggradaufhängungen (Schramm u. a. (2010)), die lediglich wenige Sekunden dauern, ist die oben genannte Integrationszeit von 100 Sekunden überdurchschnittlich lang und kann bei der Wahl eines nicht passenden Integrationsverfahrens mit ansteigender Integrationszeit zu erheblichen Fehlern in den Ergebnissen führen. Diese entstehen durch den toleranzabhängigen Integrationsfehler sowie durch die Verletzung der mechanischen Energiebilanz aufgrund der hohen Anzahl an Kontakten zwischen Rad und Schiene. Im Folgenden soll zunächst anhand eines Minimalbeispiels der Einfluss des gewählten Integrationsverfahrens auf die Qualität der Simulationsergebnisse untersucht werden.

3.4.1 Integration mit variabler und fester Schrittweite

Zur Lösung von Anfangswertproblemen der Form

$$f(t, y) = \dot{y} \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0 \quad (3.60)$$

können verschiedene Integrationsansätze verfolgt werden. Integrationsverfahren mit variabler Schrittweite können bei einfachen Simulationsanwendungen zu einem erheblichen Rechenzeitvorteil gegenüber Verfahren mit konstanten Schrittweiten führen. Bei geringer Änderung der generalisierten Koordinaten bzw. deren Ableitungen kann das Verfahren mit verhältnismäßig großen Schrittweiten die Änderungen der Systemgleichungen berechnen, ohne die vorgegeben Integrationstoleranzen zu verletzen. Eine abrupte Änderung der generalisierten Koordinaten, die beispielsweise durch einen Stoß

⁹Aus internem Bericht der Maurer AG.

entstehen kann, erfordert jedoch im Umkehrschluss, dass der Stoßzeitpunkt sehr genau ermittelt werden muss, wozu weitere Iterationen notwendig sind. Der in der vorliegenden Arbeit genutzte ADAMS-MOULTON-Integrationsansatz kann durch

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^q b_j f(t_{n-j}, y_{n-j}) \quad (3.61)$$

mit Hilfe der variablen Schrittweite h sowie

$$b_j = \frac{(-1)^j}{j!(q-j)!} \int_0^1 \prod_{i=0, i \neq j}^q (u+i) du, \quad j = 0, \dots, q \quad (3.62)$$

beschrieben werden¹⁰ (Hairer u. a. (2009)). q^{11} beschreibt hierbei die Ordnung des Verfahrens und somit die Anzahl der zu berücksichtigenden bereits bekannten Ergebnisse aus vorherigen Zeitschritten. Im Gegensatz hierzu kann das Anfangswertproblem aus Gleichung 3.60 durch ein Verfahren mit fester Schrittweite gelöst werden. Im einfachsten Fall ist dies das EULER-Verfahren, welches lediglich die erste Ableitung der vorherigen Lösung sowie die Schrittweite h berücksichtigt

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n). \quad (3.63)$$

Während bei Verfahren mit variabler Schrittweite die Gesamtdauer der Berechnung a priori nicht bestimmt werden kann, ist die Rechenzeit bei Verfahren mit fester Schrittweite vorher bekannt. Dieser Vorteil wird oft in Echtzeitanwendungen genutzt (Popovici u. Mosterman (2012)). Zu klein gewählte feste Schrittweiten büßen wiederum den Vorteil der schnelleren Rechenzeit ein. Um dies genauer zu untersuchen, wird im Folgenden ein Minimalbeispiel mit beiden gezeigten Ansätzen gelöst. Hierbei handelt es sich um eine homogene Kugel mit den in Tabelle 3.4 gezeigten Eigenschaften, die aus einer Höhe von 2 Metern fallen gelassen wird und bei Kontakt mit dem Boden eine lineare Kontaktkraft erfährt.

Größe	Masse	Trägheitsmoment	Federsteifigkeit	Simulationszeit	Radius
Formelz.	m	$\Theta_{x,y,z}$	k	t	r
Einheit	[Kg]	[Kg m ²]	[N/m]	[s]	[m]
Zahlwert	1.0	2.0	1000000	100	0.15

Tabelle 3.4: Modellgrößen des Minimalbeispiels: Kugel

¹⁰Zur Vermeidung von Inkonsistenzen wurde das im Original genutzte s durch i ersetzt.

¹¹In diesem Zusammenhang keine verallgemeinerte Koordinate

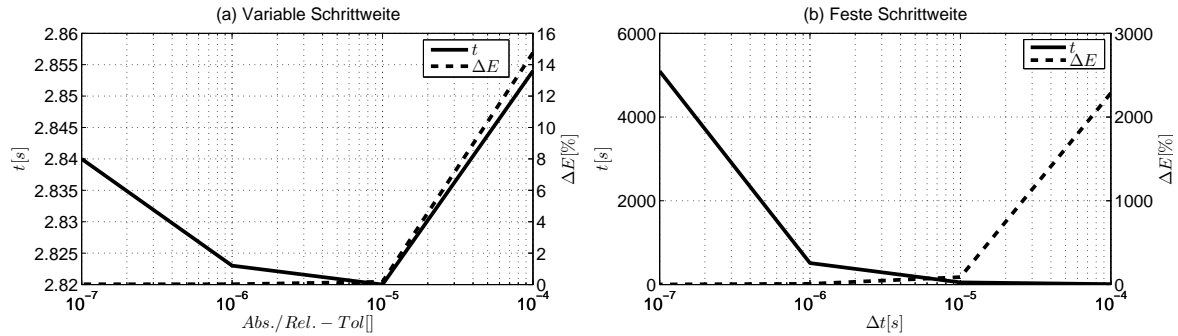


Abbildung 3.15: Minimalbeispiel: Vergleich von Rechenzeit und Energiefehler mit (a) variabler - (b) fester Schrittweite

Zur Bestimmung des in Abbildung 3.15 und Tabelle 3.5 gezeigten Energiefehlers wird der Energieunterschied (kinetische und potentielle Energie) zum Zeitpunkt $t_0 = 0s$ und $t_{end} = 100s$ durch

$$\Delta E = \left\| \frac{E(t_{end}) - E(t_0)}{E(t_0)} \right\| * 100\% \quad (3.64)$$

bestimmt. Wie in Zeile 3 und 4 der Tabelle deutlich zu erkennen, muss eine feste Schrittweite von $1e^{-6}$ bzw. $1e^{-7}$ gewählt werden, um einen in der Größenordnung ähnlichen Energiefehler im Vergleich zum Ansatz mit variabler Schrittweite zu erhalten. Dies resultiert in einer um eine von Faktor von bis zu 1807 höheren Rechenzeit. Ähnliche Zeitfaktoren der Rechenzeit im Vergleich von variablen und konstanten Schrittweiten konnten mit einem Einzelfahrzeugmodell (vgl. Abschnitt 3.3.3) auf einer ebenen Kreisbahn mit einem Radius von 20 Metern und zufällig erzeugten Schienenabweichungen nachgebildet werden (Malessa u. Kecskeméthy (2012b), Malessa u. Kecskeméthy (2012a)). Aufgrund der enormen Rechenzeitunterschiede wird von der Nutzung eines Integrationsverfahrens mit fester Schrittweite in der vorliegenden Arbeit abgesehen.

	(a) Variable Schrittweite				(b) Feste Schrittweite			Zeitfaktor
#	Abs. [-]	Rel [-]	Zeit [s]	ΔE [%]	Schrittw. [s]	Zeit [s]	ΔE [%]	(b)/(a)
1	-	-	-	-	1e-4	8.61	2285.9	-
2	-	-	-	-	1e-5	50.26	87.86	-
3	1e-4	1e-4	2.85	14.76	1e-6	512.63	7.47	179.87
4	1e-5	1e-5	2.82	0.1756	1e-7	5095.63	0.73	1806.96
5	1e-6	1e-6	2.82	0.014	-	-	-	-
6	1e-7	1e-7	2.83	0.016	-	-	-	-

Tabelle 3.5: Vergleich: Rechenzeit und Energiefehler variable (a) - feste (b) Schrittweite

3.4.2 Integration mit variabler Schrittweite mit und ohne Ereignis-Steuerung

Zur Verringerung des Energiefehlers und daraus resultierender Verbesserung der Simulationsergebnisse kann im Vergleich zum vorherigen Abschnitt ein Integrationsverfahren mit variablen Schrittweiten und zusätzlicher Ereignis¹²-Steuerung (Petzold u. Hindmarsh (2005)) genutzt werden. Hierbei werden neben der Integration der Systemgleichungen vorher definierte zusätzliche Null-Funktionen¹³ auf ihre jeweiligen Nulldurchgänge überwacht (Routine: `Lsodar` aus `ODEPACK`, Hindmarsh u. Petzold (2005)). Bei dem Nulldurchgang einer Null-Funktion wird die Integration automatisch gestoppt und die exakten Werte der Systemvariablen zum Durchgangszeitpunkt iterativ bestimmt. Hiernach wird die Integration mit den exakt bestimmten Werten der Systemvariablen neu gestartet. Als zu überwachende Funktion dient im Minimalbeispiel der Abstand zwischen Kugeloberfläche und Boden (vgl. Gleichung 3.19). Tabelle 3.6 zeigt in Abhängigkeit der Integrationstoleranz die Simulationsergebnisse des Minimalbeispiels. Hierbei ist deutlich zu erkennen, dass die zusätzlich zu überwachende Funktion die Integrationszeit lediglich um einen Faktor von 0.02 erhöht und somit zu vernachlässigen ist. Ebenfalls zeigt sich deutlich, dass durch die genaue Detektion des Kontaktzeitpunkts der Energiefehler um einen Faktor von bis zu 9 verkleinert werden kann. Lediglich bei Toleranzen unterhalb von $1e^{-7}$ zeigen sich nahezu identische Energiefehler. Ein ähnliches Verhalten ist ebenfalls bei komplexeren Modellen zu beobachten. Das aus Abschnitt 3.3.3 bekannte Einzelfahrzeugmodell zeigt mit ereignisgesteuertem Integrator bei größeren Toleranzen einen um den Faktor 10 kleineren Energiefehler. Ab einer Toleranz von $1e^{-9}$ ist der Unterschied ebenfalls vernachlässigbar gering (Marella u. Kecskeméthy (2012c)). Im Gegensatz zum Minimalbeispiel zeigt sich, dass die Rechenzeit bei komplexeren Modellen mit Kontakten zwischen verschiedenen Körpern

#	Toleranz		(a) Ohne Events		(b) Mit Events		Zeitfaktor	Energiefaktor
	Abs. [-]	Rel [-]	Zeit [s]	ΔE [%]	Zeit [s]	ΔE [%]	(a)/(b)	(a)/(b)
1	1e-4	1e-4	2.85	14.76	2.9	2.65	0.98	5.57
2	1e-5	1e-5	2.82	0.1756	2.89	0.02	0.98	8.78
3	1e-6	1e-6	2.82	0.014	2.9	0.0075	0.97	1.87
4	1e-7	1e-7	2.83	0.016	2.88	0.015	0.98	1.07
5	1e-8	1e-8	2.94	0.00019	2.89	0.00016	1.02	1.19

Tabelle 3.6: Vergleich: Rechenzeit und Energiefehler ohne (a) - mit (b) Ereignis-Steuerung

¹² „engl.: *Event*“

¹³ „engl.: *Zero-Function*“

positiv durch die Ereignis-Steuerung beeinflusst wird und über den gesamten Toleranzbereich um einen Faktor von 1.6 bis 2.7 verkürzt ist. Die verringerte Rechenzeit folgt aus der für den Integrator besser planbaren variablen Schrittweite, welche sonst beim Nulldurchgang zu wiederholten Schrittweitenverringerungen führt. Die durchgeführten Untersuchungen zeigen deutlich, dass sich ein ereignisgesteuertes Integrationsverfahren bei komplexeren Modellen positiv auf den Energiefehler wie auch auf die Rechenzeit auswirkt. Aus diesem Grund ist der genutzte **Lsodar** Integrator mit Ereignis-Steuerung, Grundlage aller in Kapitel 4 und 5 gezeigten Simulationsergebnisse.

3.5 Kinetostatische Grundobjekte zur objektorientierten Schwingungssimulation von Achterbahnfahrzeugen

Der folgende Abschnitt zeigt die kinetostatischen Grundobjekte zur objektorientierten Modellierung von Achterbahnfahrzeugen. Der Abschnitt beginnt mit einem einfachen Rad-Schiene-Kontaktmodell, dieses wird anschließend zu dem in der vorliegenden Arbeit genutzten Rad-Schiene-Modell erweitert. Der Abschnitt schließt mit einer Betrachtung des zur Simulation des Schienenzylinders notwendigen Curve-Joint (Tändl (2009)).

3.5.1 MoCylindricalContactElement

Abbildung 3.16 zeigt das aus zwei Blöcken bestehende kinetostatische Übertragungselement „MoCylindricalContactElement“ des reibungsfreien Rad-Schiene-Kontaktes (vgl. Abschnitt 3.2.1). Im ersten Block „MoChordCylinderCylinder“ wird aus den Einheitsvektoren der Symmetrieachse der Abstand d zwischen beiden Zylindermantelflächen sowie die erste und zweite zeitliche Ableitung bestimmt. Im zweiten Block „MoContactForceElement“ wird aus diesen Größen mit Hilfe der gewählten Übertragungsfunktion sowie einem Parametervektor \underline{p} (vgl. Abschnitt 3.2.2) der Betrag

$$\lambda = f_\lambda(d, \dot{d}, \ddot{d}, \underline{p}) = F(d, \dot{d}, \ddot{d}, \underline{p}) \quad (3.65)$$

der Kontaktkraft berechnet. Die Kontaktkraft wird dann durch die Jacobi-Matrix des ersten Blocks in Form von Kraft- und Momentenvektoren auf die Schiene (\mathcal{K}_l) sowie das Rad (\mathcal{K}_r) verteilt. Wie in der Abbildung dargestellt, wird der letzte Block in einer Übertragungskette immer als Blattelement (Kecskenéthy (1993)) ausgelegt. Unter Verwendung des Geschwindigkeits- bzw. Kraftwinders (vgl. Gleichung 3.10) so-

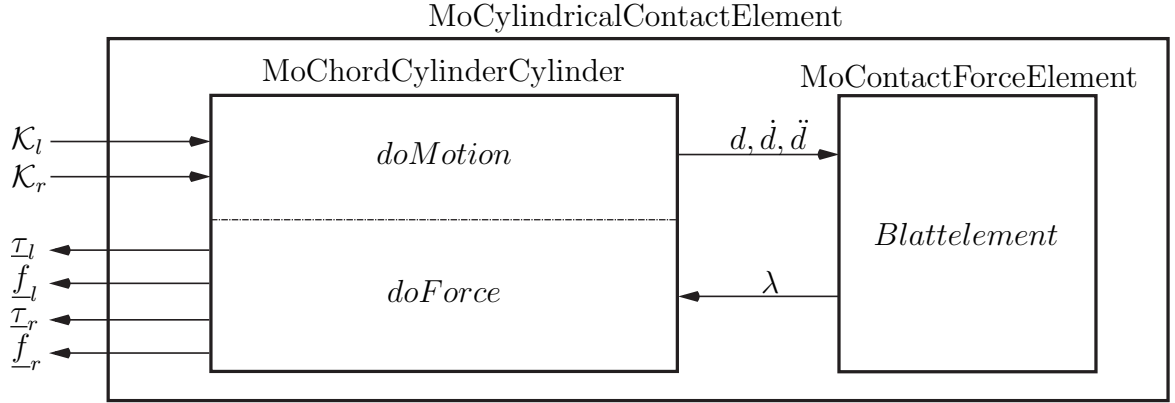


Abbildung 3.16: Kinetostatisches Übertragungselement: MoCylindricalContactElement

wie Gleichung 3.12 kann mit Hilfe der Jacobi-Matrix \mathbf{J}_q die Geschwindigkeit- sowie Kraftübertragung durch

$$\dot{d} = \mathbf{J}_q \begin{bmatrix} \underline{\omega}_l^T & \underline{v}_l^T & \underline{\omega}_r^T & \underline{v}_r^T \end{bmatrix}^T \quad (3.66)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \underline{\tau}_l^T & \underline{f}_l^T & \underline{\tau}_r^T & \underline{f}_r^T \end{bmatrix} = \mathbf{J}_q^T \lambda \quad (3.67)$$

beschrieben werden. Die Jacobi-Matrix kann mit \underline{u}_l , \underline{u}_r und $\tilde{\underline{n}}$ aus Abschnitt 3.2.1 und

$$\underline{\alpha} = \left[\frac{1}{\tilde{\underline{n}}} \cdot [\underline{u}_l \times (\underline{u}_r \times \Delta \underline{r}_{lr})] - A \cdot [\underline{u}_l \times (\underline{u}_r \times \tilde{\underline{n}})] \right] \quad (3.68)$$

$$\underline{\beta} = \left[\frac{1}{\tilde{\underline{n}}} \cdot [(\underline{u}_l \times \Delta \underline{r}_{lr}) \times \underline{u}_r] - A \cdot [(\underline{u}_l \times \tilde{\underline{n}}) \times \underline{u}_r] \right] \quad (3.69)$$

$$A = \frac{\underline{n}^T \Delta \underline{r}_{lr}}{\tilde{\underline{n}}^T \tilde{\underline{n}}} \quad (3.70)$$

durch

$$\mathbf{J}_q = [\underline{\alpha}^T \quad -\underline{n}^T \quad \underline{\beta}^T \quad \underline{n}^T] \quad (3.71)$$

beschrieben werden.

3.5.2 MoCylindricalContactAndFrictionElement

Abbildung 3.17 zeigt das auf dem vorherigen Abschnitt basierende Übertragungselement „MoCylindricalContactAndFrictionElement“ des Rad-Schiene-Modells mit Rollreibung. Aufgrund des objektorientierten Aufbaus der Simulationsumgebung MIBILE kann das zuvor dargestellte „MoCylindricalContactElement“ ohne weitere Anpassung

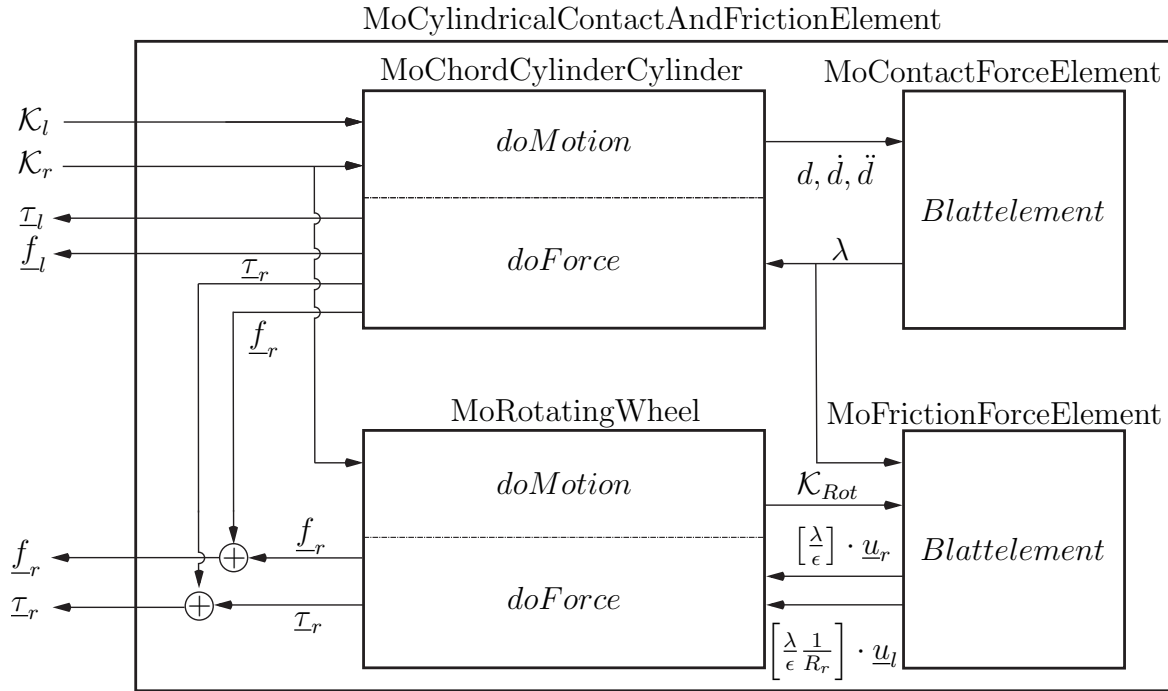


Abbildung 3.17: Kinetostatisches Übertragungselement: MoCylindricalContactAndFrictionElement im Zustand Rollen

zur Berechnung der Rad-Schiene-Kontaktkraft λ genutzt werden. Diese wird nun zusätzlich im „MoFrictionForceElement“ zur Berechnung der Reibkraft bzw. dem Reibmoment (vgl. Gleichung 3.39, 3.40) genutzt und durch die Jacobi-Matrix von „MoRotatingWheel“ auf die Radnabe bzw. das Rad verteilt

$$\begin{bmatrix} \underline{T}_r \\ \underline{f}_r \end{bmatrix} = \mathbf{J}_q^T \cdot \begin{bmatrix} \underline{T}_{Rot} \\ \underline{f}_{Rot} \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Für die Translations- und Rotationsgeschwindigkeit des Rades folgt somit

$$\begin{bmatrix} \underline{\omega}_{Rot} \\ \underline{v}_{Rot} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_q \begin{bmatrix} \underline{\omega}_r \\ \underline{v}_r \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

Die für beide Übertragungen notwendige Jacobi-Matrix kann mit Hilfe von Gleichung 3.48 durch

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} \underline{I} & \frac{\underline{u}_l^T}{\left[1 - \left(\frac{1}{\rho - R_l} \right) \underline{n}_p^T \Delta \underline{r}_{lr} \right] R_r} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

beschrieben werden.

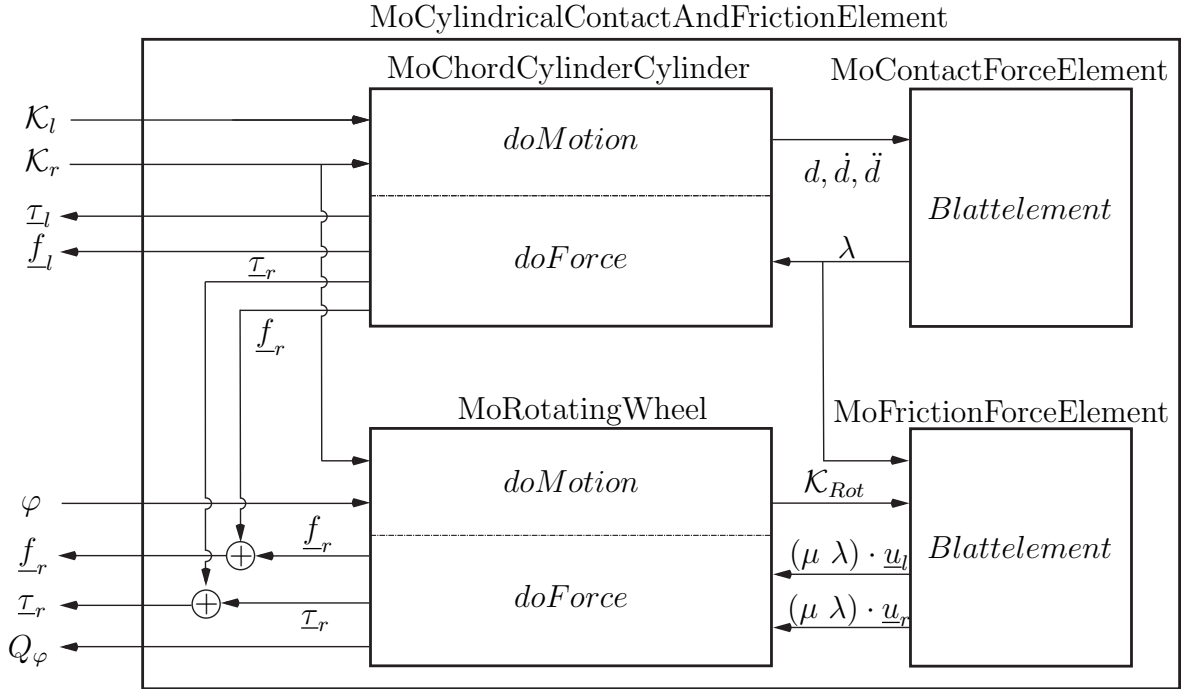


Abbildung 3.18: Kinetostatisches Übertragungselement: MoCylindricalContact-AndFriction im Zustand Gleiten

Im Gegensatz hierzu zeigt Abbildung 3.18 das Übertragungselement „MoCylindricalContactAndFrictionElement“ des Rad-Schiene-Modells mit Gleitreibung. Wie in der Abbildung zu erkennen ist, ist der Drehwinkel φ des Rades als zusätzlicher Freiheitsgrad des Systems berücksichtigt und lässt sich zusätzlich zu den Geschwindigkeiten durch

$$\begin{bmatrix} \underline{\omega}_{Rot} \\ \underline{v}_{Rot} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_q \begin{bmatrix} \underline{\omega}_r \\ \underline{v}_r \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

übertragen. Die zwischen Radnabe und Rad wirkenden Kräfte und Momente (vgl. Gleichung 3.42, 3.43) übertragen sich somit durch

$$\begin{bmatrix} \underline{\tau}_r \\ \underline{f}_r \\ Q_r \end{bmatrix} = \mathbf{J}_q^T \cdot \begin{bmatrix} \underline{\tau}_{Rot} \\ \underline{f}_{Rot} \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Die hierfür notwendige Jacobi-Matrix kann mit Hilfe der Rotationsachse dargestellt werden.

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{u}_r \\ \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

3.5.3 MoCurveJoint

Der folgende Abschnitt zeigt eine kurze Einführung in das für die Positionierung des Schienenzylinders notwendige Curve-Joint. Alle dargestellten Abbildungen und Gleichungen sind hierbei aus Tändl (2009) entnommen. Abbildung 3.19 zeigt das Modell und das kinetostatische Übertragungselement eines Curve-Joint. Die Geschwindigkeits- und Kraftübertragung kann hierbei mit Hilfe der Jacobi-Matrizen \mathbf{J}_g und \mathbf{J}_s durch

$$\begin{bmatrix} \underline{\omega}_2 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_g \begin{bmatrix} \underline{\omega}_1 \\ \underline{v}_1 \end{bmatrix} + \mathbf{J}_s \dot{s} \quad (3.78)$$

und

$$\begin{bmatrix} \underline{\tau}_1 \\ \underline{f}_1 \\ Q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_g^T \\ \mathbf{J}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\tau}_2 \\ \underline{f}_2 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

beschrieben werden. Dabei ist \mathbf{J}_g die so genannte Starrkörper-Jacobi-Matrix, welche die Geschwindigkeiten und Kräfte zwischen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 überträgt und durch

$$\mathbf{J}_g = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{R}^T & \underline{0} \\ -\Delta \mathbf{R}^T \widetilde{\Delta \underline{r}} & \Delta \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

dargestellt werden kann. $\widetilde{\Delta \underline{r}}$ ist hierbei die schiefsymmetrische Matrix aus dem Differenzvektor.

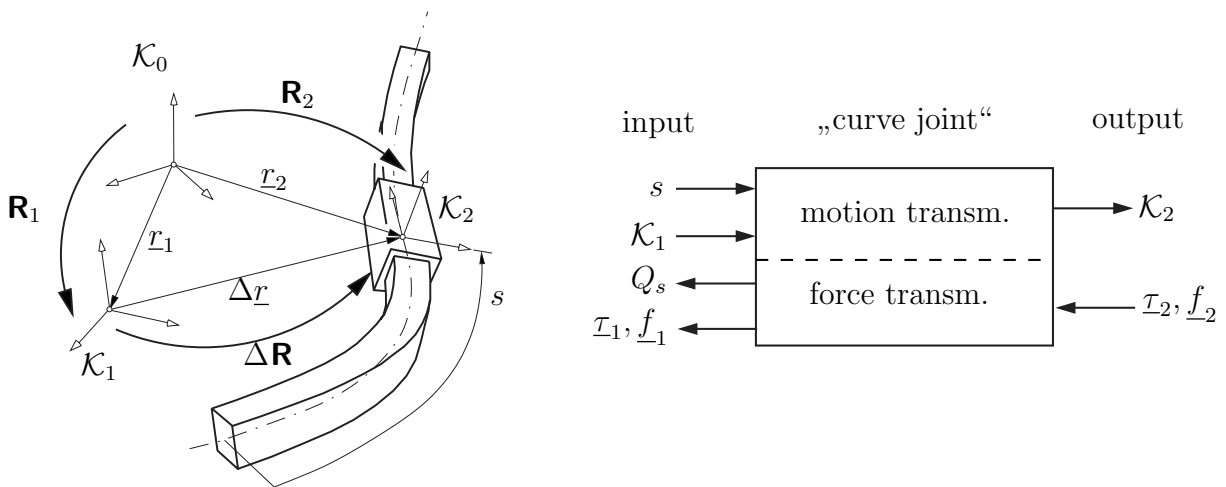


Abbildung 3.19: Modell und kinetostatisches Übertragungselement eines Curve-Joint (nach Tändl (2009))

Die zweite Jacobi-Matrix \mathbf{J}_s sorgt für eine Übertragung der Pfadgeschwindigkeit (Bahngeschwindigkeit) \dot{s} auf das Curve-Joint-Koordinatensystem \mathcal{K}_2 .

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{t} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

Hierbei beschreibt \underline{u} den Darbouxvektor und \underline{t} die Tangente (vgl. Abschnitt 2.2) an der jeweiligen Stelle s der Raumkurve.

4 Analyse der Methoden zur Modellierung von Schienenabweichungen

Das folgende Kapitel zeigt zunächst verschiedene Methoden zur Analyse von Schwingungen. Dargestellt wird die Analyse im Zeit- und Frequenzbereich sowie mit Hilfe der Rainflow-Methode. Anschließend werden Simulationsergebnisse des im vorherigen Kapitel eingeführten Tandemfahrzeugmodells analysiert. Zur Modellierung der Schienenabweichungen werden zunächst interpolierende Verfahren aus Kapitel 2 genutzt. Darauf folgt eine detaillierte Untersuchung des Glättungsfaktor S zur Approximation der Schienenabweichungen. Das Kapitel schließt mit einer Analyse der daraus resultierenden Simulationsergebnisse.

4.1 Methoden zur Analyse von Schwingungen

Für die Analyse bzw. den Vergleich von Signalen ist aus der Literatur eine Vielzahl von unterschiedlichen Verfahren bekannt. Im Zeitbereich kann zur Untersuchung der Übereinstimmung die Summe der Fehlerquadrate (Papula (2004), Duda u. a. (2001)) bzw. eine Erweiterung dieser mit gewichteten Einflussfaktoren verschiedener Eigenschaften (Sukalkar (2009), Malessa (2010)) genutzt werden. Für die Analyse im Frequenzbereich kann auf Standardmethoden wie die Fast-Fourier-Transformation (Lunze (2002)) oder die spektrale Leistungsdichte (Brigham (1997)) zurückgegriffen werden. Eine weitere Möglichkeit zum Vergleich von Schwingungsamplituden und Schwingungsmittelwerten bietet die im Anschluss vorgestellte Rainflow-Analyse (Jenne u. a. (2012)).

4.1.1 Summe der Fehlerquadrate

Grundlage der Berechnung der Summe der Fehlerquadrate sind über die Zeit t dargestellte Signale $y_1(t)$ und $y_2(t)$. Diese können entweder Mess- bzw. Simulationsergebnisse oder zufällig erstellte Testsignale, welche beispielsweise durch

$$y_i(t) = A_i + (a1_i \sin(2\pi f1_i t) + b1_i \cos(2\pi f2_i t) + err) \quad (4.1)$$

mit den in Tabelle 4.1 angegebenen Konstanten und einer zu definierenden Schrittweite beschrieben sind, sein. err ist hierbei eine zufällig generierte Messabweichung (White-Noise) mit einem Mittelwert von Null. Zur Bestimmung der Abweichung beider Kurven

$A_1[m]$	$a1_1[m]$	$b1_1[m]$	$f1_1[Hz]$	$f1_2[Hz]$
10	3.5	2.5	100	75
$A_1[m]$	$a2_1[m]$	$b2_1[m]$	$f2_1[Hz]$	$f2_2[Hz]$
11	2.5	3.5	50	25

Tabelle 4.1: Variablen für Beispielfunktionen

werden die Funktionswerte beider in Abbildung 4.1 (a) gezeigten Signale voneinander abgezogen und quadriert. Wie in Abbildung 4.1 (b) gezeigt, folgt daraus die über die Zeit aufgetragene Abweichung beider Signale. Die gesamte Abweichung bzw. der gesamte Fehler F_{lms} der Signale lässt sich dann durch die Summe der Fehlerquadrate

$$F_{lms} = \sum_{i=1}^n [y_1(t_i) - y_2(t_i)]^2 \quad (4.2)$$

berechnen. Für die in Abbildung 4.1 (a) gezeigten Signale beträgt der Fehler F_{lms} beispielsweise 10005,37.

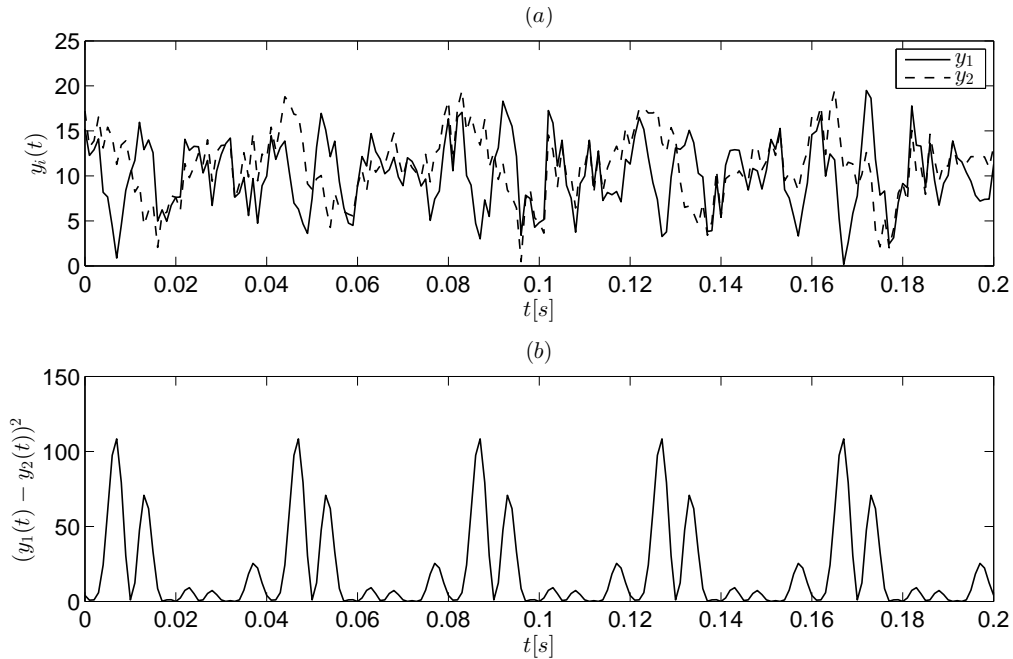


Abbildung 4.1: Testsignale y_1 und y_2 (a) - Quadrierte Differenz (Summe der Fehlerquadrate) der Testsignale (b)

4.1.2 Spektraldichte

Neben der zuvor gezeigten Untersuchung der Abweichung zweier Signale im Zeitbereich kann die Abweichung der im Signal enthaltenen Frequenzen von Bedeutung sein. Hierzu kann das Signal durch eine Fast-Fourier-Transformation (im Folgenden FFT) der Form

$$y(t) \circ \longrightarrow y(f) \quad (4.3)$$

von dem Zeit- in den Frequenzbereich überführt werden (Lunze (2002)). Grundidee hierbei ist, dass jedes periodische Signal durch die Summe von n Sinussignalen mit verschiedenen Frequenzen und Amplituden dargestellt werden kann. Hieraus folgt die allgemeine Darstellung der Fourier-Transformation (Brigham (1997)).

$$F\{y(t)\} = Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-(j2\pi ft)} dt \quad (4.4)$$

$F\{y(t)\}$ heißt hierbei die Fouriertransformierte von einem kontinuierlichen Signal $y(t)$. Für zeitdiskrete Signale mit N Stützstellen und einer Abtastrate von $\Delta T = t_{i+1} - t_i$ folgt die diskrete Fast-Fourier-Transformation (im Folgenden DFFT¹) (Brigham (1995)).

$$F\{y(t_i)\} = Y(f_k) = \sum_{i=0}^{N-1} y(t_i) e^{(j2\pi f_k t_i)} \Delta T \quad \text{mit } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.5)$$

Durch Anwendung der EULER-Formel kann die Exponentialfunktion aus Gleichung 4.4 bzw. 4.5 in eine Kombination aus Sinus und Kosinus überführt werden.

$$e^{(j2\pi ft)} = \cos(2\pi ft) + i \sin(2\pi ft) \quad (4.6)$$

Das Ergebnis einer FFT bzw. DFFT kann in der Regel in einen Real- ($RE(f, f_k)$) und einen Imaginärteil ($IM(f, f_k)$) zerlegt werden.

$$Y(f, f_k) = RE(f, f_k) + i IM(f, f_k) = \|Y(f, f_k)\| e^{j\theta(f, f_k)} \quad (4.7)$$

Hierbei wird

$$\|Y(f, f_k)\| = \sqrt{RE^2(f, f_k) + IM^2(f, f_k)} \quad (4.8)$$

¹In der vorliegenden Arbeit wird in allen folgenden Frequenzanalysen der Übersichtlichkeit halber f anstatt f_k genutzt.

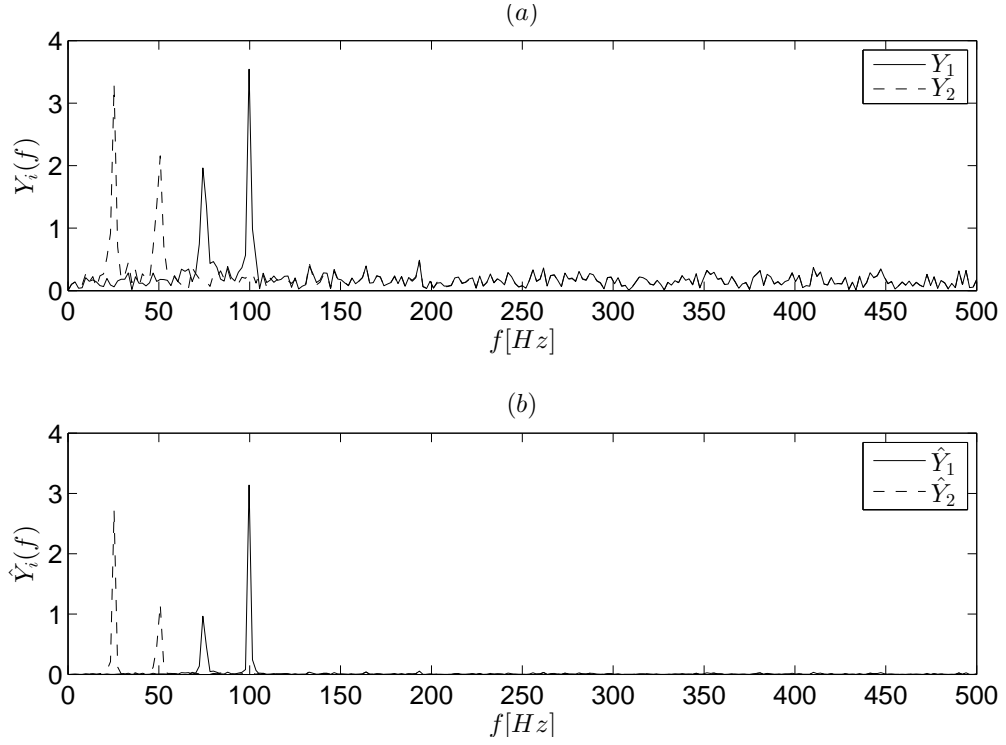


Abbildung 4.2: FFT (a) - PSD (b) der Beispielsignale

als Amplitudenspektrum und

$$\theta(f, f_k) = \frac{RE(f, f_k)}{IM(f, f_k)} \quad (4.9)$$

als Phasenspektrum bezeichnet. Um in der Analyse einen Frequenzpeak bei 0 Hz zu vermeiden, wird von dem zu analysierenden Signal vor der DFFT Analyse der Mittelwert subtrahiert

$$\tilde{y}(t, t_i) = y(t, t_i) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(t, t_i) \quad (4.10)$$

und das Signal somit auf die Nulllage verschoben.

Abbildung 4.2 (a) zeigt das Ergebnis der DFFT für die beiden aus Abschnitt 4.1.1 definierten Testsignale. Wie zuvor beschrieben, werden die zu analysierenden Signale durch eine Kombination von verschiedenen Sinussignalen abgebildet. Die Amplituden (vgl. Gleichung 4.8) der Signale werden dann über die jeweiligen Frequenzen aufgetragen. Der Frequenzbereich ist nach dem NYQUIST-SHANNON-Abtasttheorem auf die Hälfte der gewählten Abtastfrequenz begrenzt. Wie in der Abbildung deutlich zu erkennen, sind die in den Signalen enthaltenen Frequenzen (vgl. Tabelle 4.1) in Form von Peaks dargestellt. Ebenfalls werden die Amplituden korrekt abgebildet. Der neben

den Peaks deutlich zu erkennende zackige Verlauf mit geringen Amplituden ist auf das eingefügte Messrauschen *err* zurückzuführen. Zum Vergleich beider Frequenzspektren kann nun mit Hilfe der Summe der Fehlerquadrate (vgl. Abschnitt 4.1.1) die Differenz der beiden Frequenzverläufe durch

$$F_{fft} = \sum_{i=1}^n [Y_1(f_i) - Y_2(f_i)]^2 \quad (4.11)$$

berechnet werden.

Um den Einfluss des Messrauschens auf die Frequenzanalyse zu verringern, wird in der vorliegenden Arbeit das Ergebnis der DFFT durch

$$\hat{Y}(f, f_k) = \|Y(f, f_k)\|^2 \quad (4.12)$$

in die Spektrale Leistungsdichte $\hat{Y}(f, f_k)$ (im Folgenden PSD) überführt (Brigham (1997)). Wie in Abbildung 4.2 (b) zu erkennen, wird durch das Quadrieren der Ergebnisse der DFFT der Einfluss des Messrauschens auf das Ergebnis der Frequenzanalyse verringert. Somit folgt für die Differenz der quadrierten Frequenzverläufe

$$F_{psd} = \sum_{i=1}^n [\hat{Y}_1(f_i) - \hat{Y}_2(f_i)]^2. \quad (4.13)$$

Die spektrale Leistungsdichte stellt die in den Signalen vorhandenen Frequenzen im Verhältnis zum Messrauschen deutlicher dar und wird somit in der vorliegenden Arbeit zur Analyse der Frequenzen genutzt. Für die in Abbildung 4.2 (b) gezeigten Frequenzverläufe kann nach Gleichung 4.13 beispielsweise ein Fehler von $F_{psd} = 19,93$ errechnet werden.

4.1.3 Rainflow-Analyse

Die zuvor gezeigten Methoden zur Analyse von Schwingungen ermöglichen den qualitativen Vergleich von Signalen im Zeit- und Frequenzbereich. Des Weiteren kann die Analyse und der Vergleich von statistischen Eigenschaften der Signale sinnvoll sein. Hierfür wird in der vorliegenden Arbeit die Rainflow-Analyse (Jenne u. a. (2012)) genutzt. Abbildung 4.3 zeigt die vier notwendigen Schritte zur Analyse eines Signals mit der Rainflow-Methode. Im ersten Schritt, dargestellt in Abbildung (a), wird das zu analysierende Signal um 90° im Uhrzeigersinn gedreht. Daraufhin werden, wie in Abbildung (b) dargestellt, in allen Hochpunkten (durch die Rotation des Signals jetzt auf

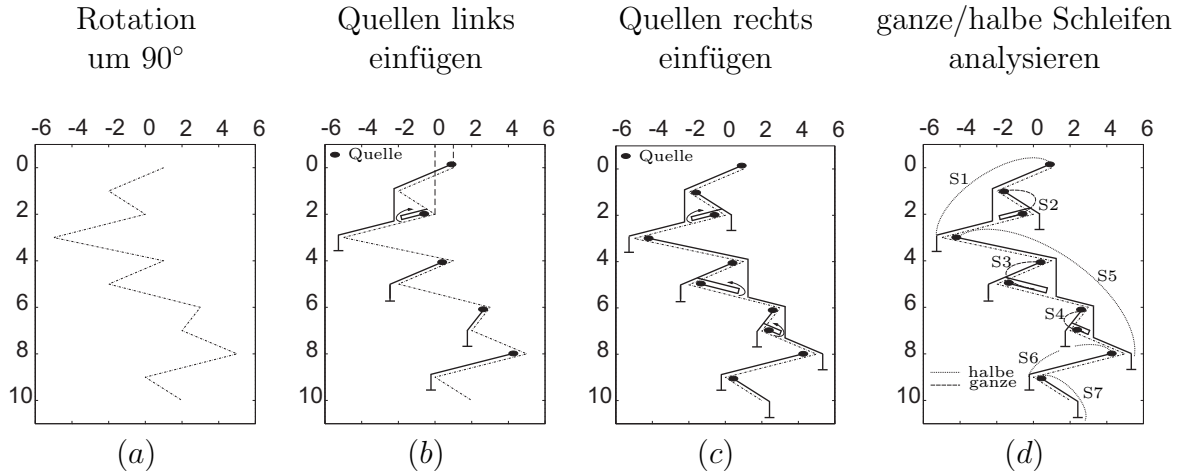


Abbildung 4.3: Beispiel zur Rainflow-Analyse: Rotation des Signals (a) - Einfügen von Quellen auf linker (b) und rechter Seite (c) - Identifizieren der Schleifen (d)

der rechten Seite) des Signals Quellen eingefügt aus denen „Wasser das Signal nach unten entlang läuft“. Trifft, wie im Punkt $[0,2]$, der Strahl von zwei Quellen aufeinander, so ändert der untere Strahl mit dem geringeren Startwert auf der x Achse seine Richtung. Identisch hierzu werden im dritten Schritt, dargestellt in Abbildung (c), Quellen in den Tiefpunkten (durch die Rotation des Signals nun auf der linken Seite) eingefügt. Strahlen, die zuvor ihre Richtung geändert haben, werden nun mit den neuen von oben kommenden verbunden. In dem in Abbildung (d) gezeigten letzten Schritt werden die aus einer bzw. aus zwei Quellen bestehenden halben bzw. ganzen Schleifen einzeln auf ihren Mittelwert und ihre Amplitude untersucht und diese in einer Tabelle summiert. Hierbei werden halbe Schleifen mit 0.5 und ganze mit 1.0 gewichtet. Nachdem alle

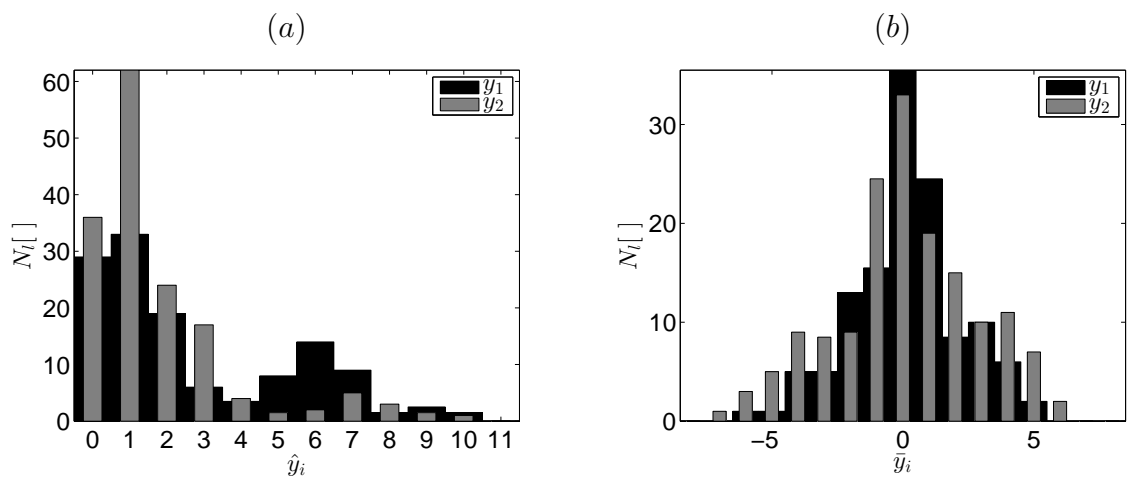


Abbildung 4.4: Ergebnisse der Rainflow-Analyse: Vergleich der Amplituden (a) - der Mittelwerte (b)

Schleifen des Signals ausgewertet sind, kann die jeweilige Anzahl N_l nach Amplitude und Mittelwert klassifiziert und dann in Form eines Balkendiagramms dargestellt werden.

Abbildung 4.4 (a) und (b) zeigt das Ergebnis der Rainflow-Analyse der in den Abschnitten 4.1.1 und 4.1.2 genutzten Testsignale. Hierbei ist in Abbildung (a) deutlich zu erkennen, dass beide Signale die meisten Schleifen und somit die meisten Schwingungen mit einem Amplitudenwert zwischen 1 und 3 haben. Abbildung (b) zeigt, dass mit steigendem Mittelwert sowohl in positiver als auch negativer Richtung die Anzahl der Schwingungen abnimmt.

4.1.4 Eigenschaften und Aufbereitung der Mess- und Simulationsdaten

Abbildung 4.5 zeigt anhand eines Beispielsignals die notwendigen Aufbereitungen der Mess- und Simulationsdaten zur Analyse der Fahrzeugschwingungen. In dem in Abbildung (a) dargestellten ersten Schritt wird hierbei das Signal durch die Subtraktion eines Nullpolynoms in Richtung der Nulllage verschoben. Durch die im zweiten Schritt durchgeführte Subtraktion des Mittelwertes, entsteht das in Abbildung (c) dargestellte Signal mit einem Mittelwert von Null. Abschließend wird das Signal, wie in Abbildung (d) dargestellt, normiert. Da es sich bei den Messwerten um relative Daten handelt, werden die Ergebnisse aller gemessenen und simulierten Beschleunigungen sowie der später gezeigten Schienenabweichungen zusätzlich auf eine allgemeine Ortskoordinate, beginnend bei $s=0$, bezogen. Die in Abbildung 4.6 dargestellten Befestigungspunkte der Beschleunigungssensoren im Tandemmodell sind identisch zu den Befestigungspunkten am realen Fahrzeug. Aufgrund ihrer Einbaulage zeigen alle Sensoren grundsätzlich unterschiedliche Ergebnisse. Die Ergebnisqualität sowie der Vergleich zwischen Messung

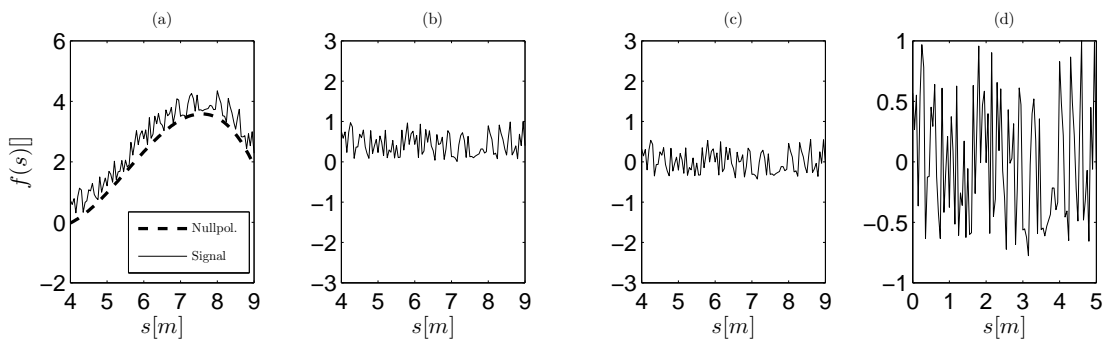


Abbildung 4.5: Aufbereitung der Mess- und Simulationsdaten: Signal und Nullpolynom (a) - Signal minus Nullpolynom (b) - neues Signal minus Mittelwert (c) - normiertes und verschoben Signal (d)

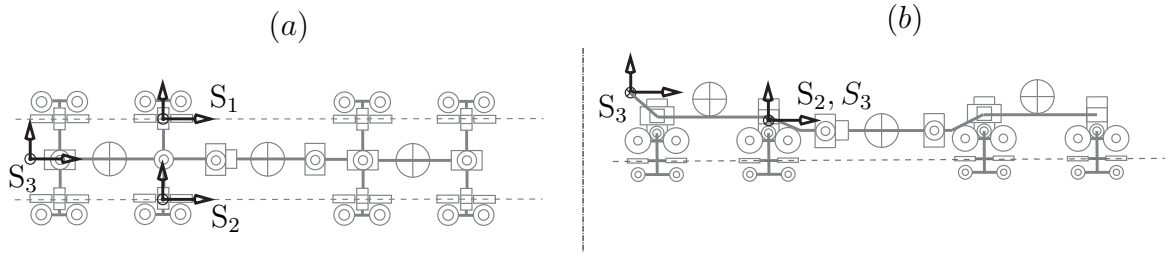


Abbildung 4.6: Platzierung der Sensoren in der Drauf- (a) und Seitenansicht (b)

und Simulation ist jedoch sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich bei allen Sensoren ähnlich. Aus diesem Grund werden in der vorliegenden Arbeit lediglich exemplarisch die Mess- bzw. Simulationsergebnisse eines Sensors (S_3) gezeigt.

Tabelle 4.2 zeigt die im Folgenden genutzten Modellparameter der Rad-Schiene-Kontaktkraftelemente (vgl. Abschnitt 3.2.2). Die gezeigten Werte für die Steifigkeit k , die Stoßzahl e und den Exponent n basieren auf Erfahrungswerten und dienen zusätzlich als Startwerte der in Kapitel 5 gezeigten Parameteridentifikation.

Rad	k	e	n	μ_L	ϵ	μ
	$1.000.000 * [\frac{N}{m}]$	[]	[]	[]	[]	[]
LR	3.5	0.75	1.125	0.0015	0.00025	0.2
SR	14.0	0.85	1.25	0.02	0.00005	0.02
GR	3.5	0.5	1.6	-	-	-

Tabelle 4.2: Modellparameter des Rad-Schiene-Modells

4.2 Analyse der Fahrzeugschwingungen bei interpolierten Schienenabweichungen

Der folgende Abschnitt zeigt die Analyse der Schwingungen des in Abschnitt 3.3.4 eingeführten Tandemfahrzeuges. Die real vermessenen Schienenabweichungen werden, wie in Abschnitt 2.4.3 dargestellt, zum einen mit Hilfe von Shape-Preserving-Splines (Methode I) und zum anderen mit Dierckx-Splines (Methode II) interpoliert.

4.2.1 Interpolation der Schienenabweichungen mit Shape-Preserving-Splines

Abbildung 4.7 zeigt die simulierten und gemessenen Beschleunigungen und daraus resultierende Spektraldichten in Lateral- und Vertikalrichtung für den Fall der Shape-Preserving-Splines. In Lateralrichtung ist deutlich zu erkennen, dass der Verlauf der Messung grundsätzlich abgebildet werden kann, die Maximalwerte der Simulation die Maximalwerte der Messung jedoch um ein vielfaches überschreiten. Dies zeigt auch der Vergleich der in Abbildung (b) dargestellten Spektraldichte. Insbesondere der Peak bei $\approx 6 \text{ Hz}$ ist deutlich zu hoch. Ein Vergleich der Beschleunigungen in Vertikalrichtung (Abbildung (c)) zeigt, dass der allgemeine Verlauf der Hoch- und Tiefpunkte abgebildet werden kann, das Simulationsergebnis aber durch höherfrequenten Schwingungen überlagert ist. In der in Abbildung (d) dargestellten Spektraldichte ist darüber hinaus zu erkennen, dass die simulierten Beschleunigungen mit bis zu 150 Hz und somit mit nahezu zehnfach erhöhter Frequenz schwingen. Die aus den Beschleunigungen resultierende und in Abbildung 4.8 dargestellte Rainflow-Analyse zeigt ebenfalls, dass neben der Höhe der Amplituden und der abgebildeten Frequenzen auch die Anzahl der Lastwechsel deutlich zu hoch liegt. Sowohl der Vergleich der Amplituden in Ab-

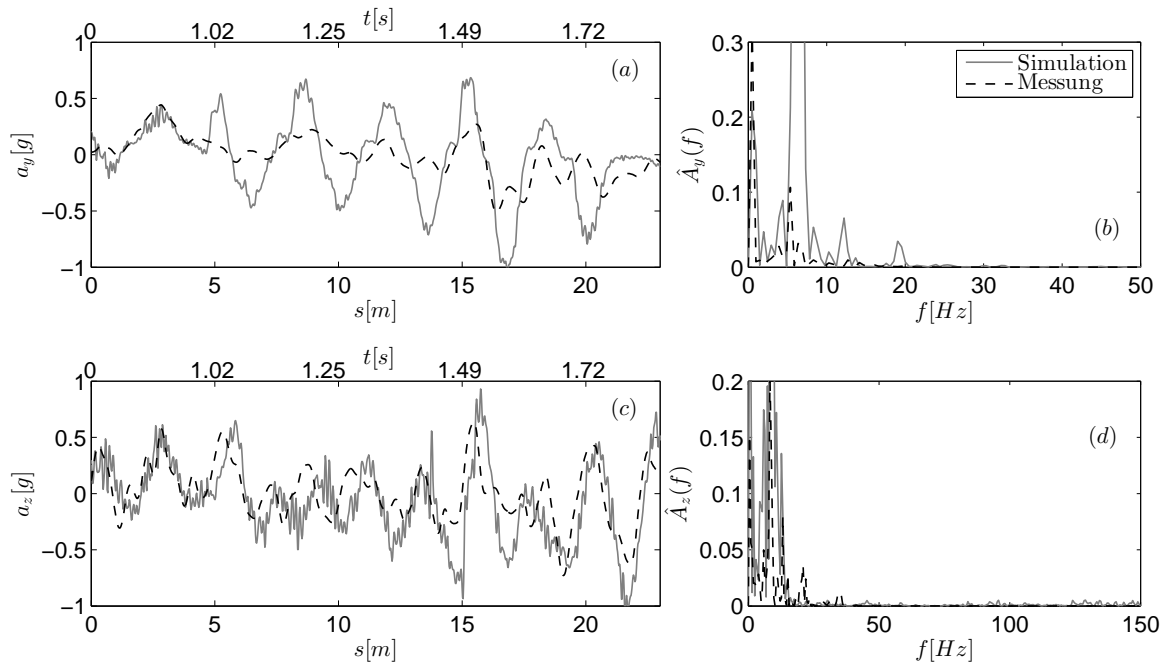


Abbildung 4.7: Vergleich der gemessenen und simulierten Beschleunigungen: laterale (a) - vertikale (c) Beschleunigungen und laterale (b) - vertikale Spektraldichte (d). Abweichungen modelliert mit Shape-Preserving-Splines

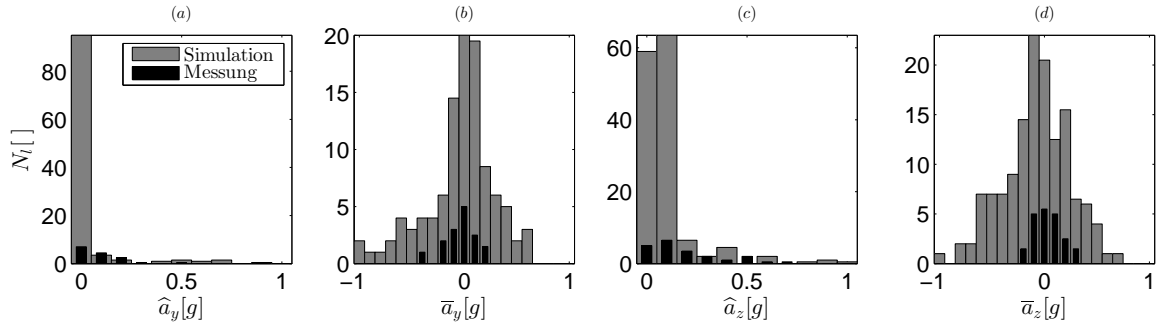


Abbildung 4.8: Rainflow-Analyse der lateralen und vertikalen Mittelwerte (a), (c) - Amplituden (b), (d). Abweichungen modelliert mit Shape-Preserving-Splines.

bildung (a) und (c) als auch der der Mittelwerte, dargestellt in Abbildung (b) und (d), zeigen deutlich erhöhte Werte. Die aus der Modellierung mit Shape-Preserving-Splines resultierenden Abweichungen der linken und rechten Schiene in lateraler und vertikaler Richtung (vgl. Abschnitt 2.4.2) sind in Abbildung 4.9² (a) und (b) qualitativ

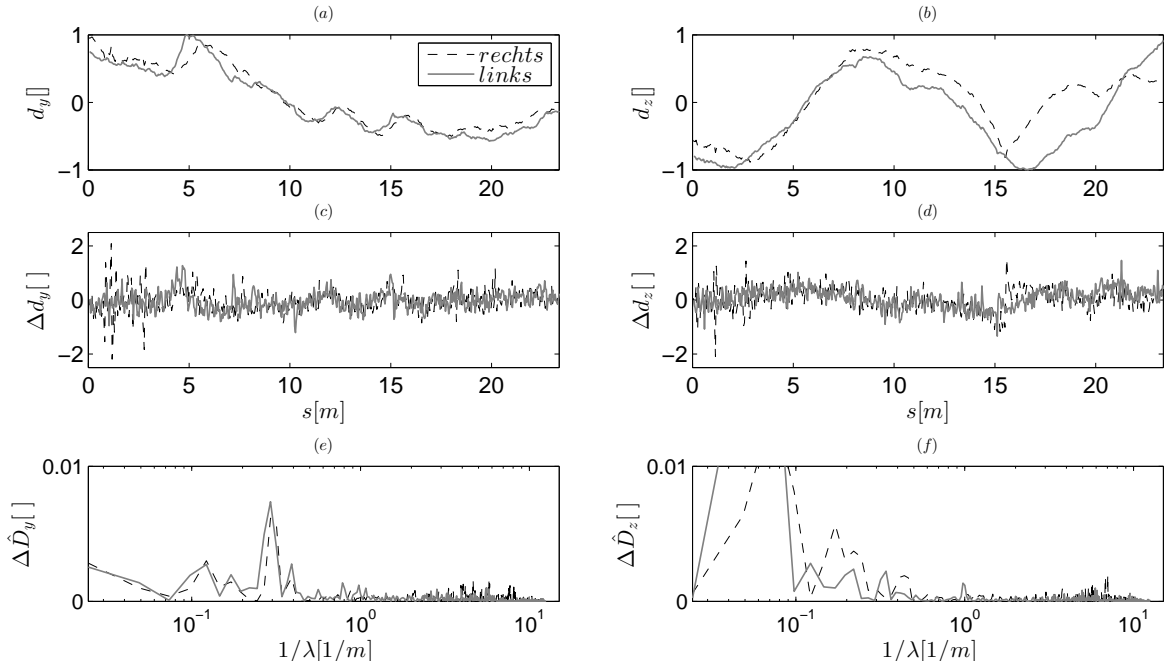


Abbildung 4.9: Abweichungen und Änderung der Abweichungen in lateraler (a), (c) - vertikaler (b), (d) Richtung. Spektraldichte der lateralen (e) - vertikalen (f) Änderungen. Abweichungen modelliert mit Shape-Preserving-Splines. d_y und d_z sind qualitativ als dimensionslose Faktoren einer charakteristischen Längeneinheit dargestellt.

²Im Zusammenhang mit gezeigten Abweichungen beschreibt λ im Folgenden immer die Wellenlänge der Änderung der Abweichung.

dargestellt. Durch Ableitung nach der Bahnkoordinate kann die Änderung

$$\Delta d_i = \frac{d d_i}{ds} \quad \text{mit} \quad i = x, z \quad (4.14)$$

der Abweichungen berechnet und wie in Abbildung (c) und (d) über s dargestellt werden. Abbildung (e) und (f) zeigen die zu (c) und (d) gehörigen Spektraldichten der Ableitungen. Hierbei zeigt sich, dass durch die Interpolation die realen Abweichungen zwar möglichst genau abgebildet werden, jedoch auch kleinste Abweichungen, die als Welligkeit der Schiene interpretiert werden können, berücksichtigt werden. Die hieraus folgende Änderung der Abweichung mit kurzen Wellenlängen ($\approx 10 \text{ cm}$) ist proportional zur Änderung der Bahntangente. Dies führt zu höherfrequenten Anregungen des Tandemfahrzeuges über das Rad-Schiene-Modell (Vergleich Gleichung 3.18) und somit zu den in Abbildung 4.7 dargestellten unrealistischen Frequenzspektren.

Im Folgenden werden die Abweichungen durch Dierckx-Splines interpoliert. Hierbei soll geprüft werden, ob die durch Optimierung minimierten Sprünge in den höchsten Ableitungen einen positiven Einfluss auf die Simulationsergebnisse haben.

4.2.2 Interpolation der Schienenabweichungen mit Dierckx-Splines

Abbildung 4.10 zeigt die simulierten und gemessenen Beschleunigungen sowie die daraus resultierenden Spektraldichten in Lateral- und Vertikalrichtung für die Interpolation ($S=0$) mit Dierckx-Splines. Der Verlauf der Hoch- und Tiefpunkte der in Abbildung (a) gezeigten Lateralbeschleunigung hat grundsätzlich eine gute Übereinstimmung mit dem Messsignal. Trotz dieser Übereinstimmung übersteigen die Amplituden des Simulationsergebnisses die Messungen um das bis zu 2.5-fache. Dies wird auch in dem in Abbildung (b) gezeigten Peak der Spektraldichte bei $\approx 6 \text{ Hz}$ deutlich. Der Vergleich der in Abbildung (c) gezeigten Vertikalbeschleunigung zeigt, dass die Amplituden der Simulation der Messung zwar deutlich besser folgen, der Verlauf aber ebenfalls durch höherfrequente Schwingungen mit bis zu 150 Hz überlagert wird. Dies zeigt sich auch deutlich in der in Abbildung 4.11 gezeigten Auswertung der Rainflow-Analyse. Sowohl die Amplituden der Simulationsergebnisse in Abbildung (a) und (c), als auch die Mittelwerte in Abbildung (b) und (d) überschreiten die Messung um ein Vielfaches. Wie im direkten Vergleich zu Abbildung 4.9 (a) und (b) deutlich zu erkennen, werden die Abweichungen der Schiene vergleichbar zur Interpolation mit Shape-Preserving-Splines abgebildet. Daraus resultierend lassen sich auch in den Ableitungen und den Frequenzspektren lediglich geringe Unterschiede ausmachen. Somit ist, identisch zum vorherigen Abschnitt, eine höherfrequente Anregung des Modells mit bis zu 150 Hz aufgrund der

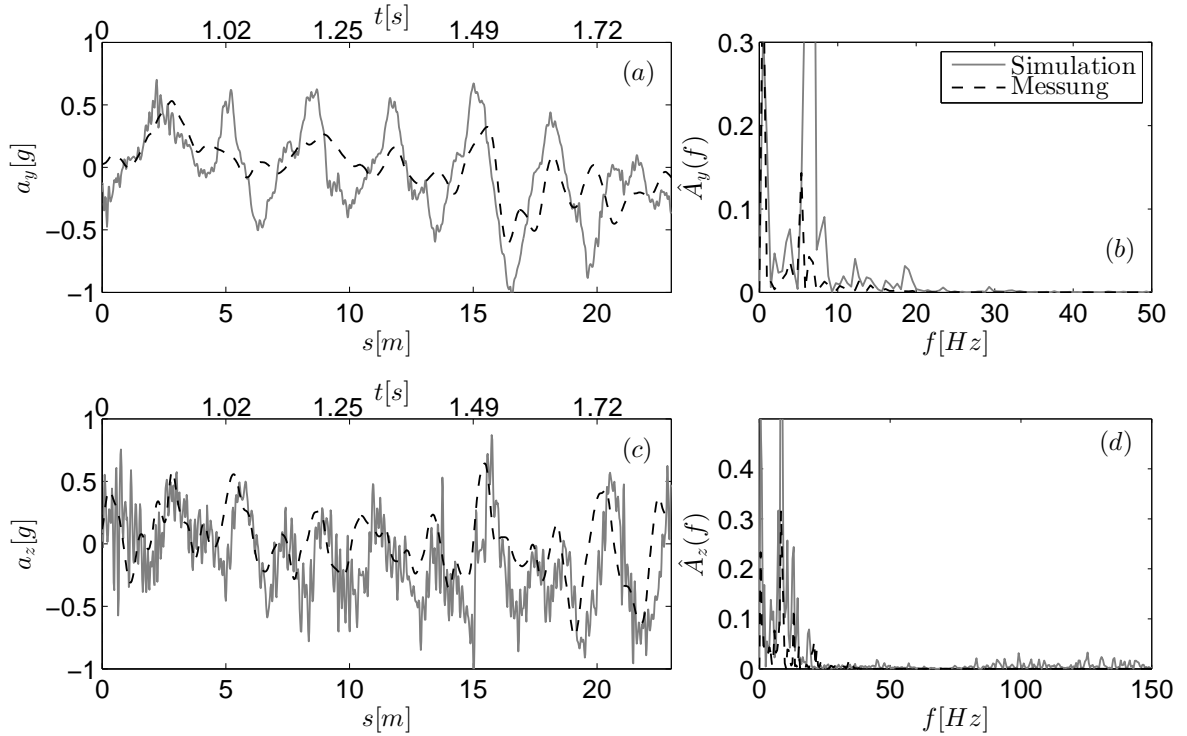


Abbildung 4.10: Vergleich der gemessenen und simulierten Beschleunigungen: laterale (a) - vertikale (c) Beschleunigungen und laterale (b) - vertikale Spektraldichte (d). Abweichungen modelliert mit Dierckx-Splines ($S=0$).

in der Modellierung vorhandenen Welligkeit zu identifizieren. Die nahezu identische Abbildung der Abweichungen folgt aus dem im Verhältnis zur Länge des betrachteten Schienensegments geringen Abstands³ zwischen den Messpunkten. Um die höherfrequenten Anregungen von der Schiene zu verringern, sollen im Folgenden die realen

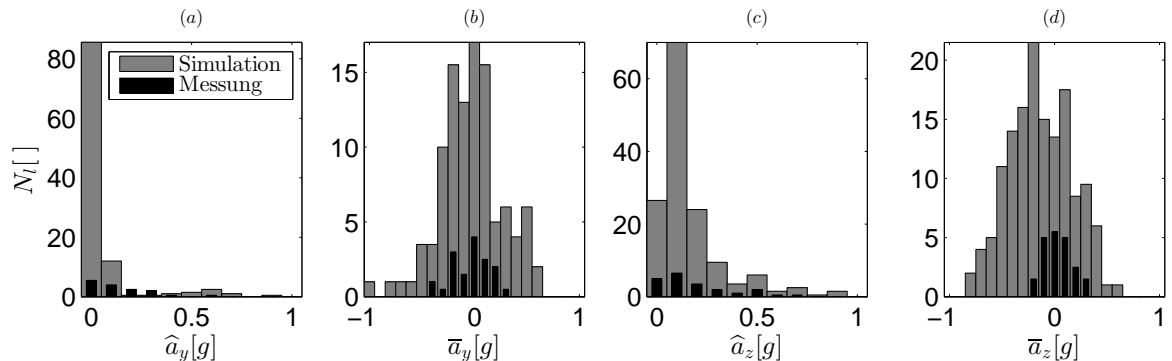


Abbildung 4.11: Rainflow-Analyse der lateralen und vertikalen Mittelwerte (a), (c) - Amplituden (b), (d). Abweichungen modelliert mit Dierckx-Splines ($S=0$).

³Aus internem Bericht der Maurer AG

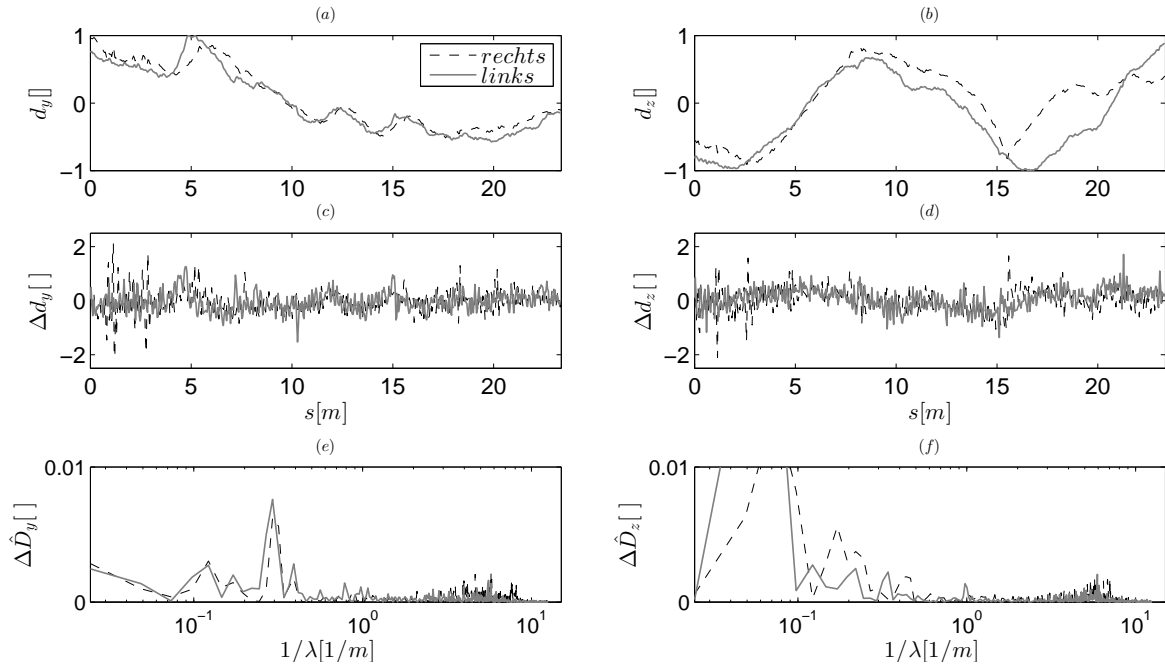


Abbildung 4.12: Abweichungen und Änderung der Abweichungen in lateraler (a), (c) - vertikaler (b), (d) Richtung. Spektraldichte der lateralen (e) - vertikalen (f) Änderungen. Abweichungen modelliert Dierckx-Splines ($S=0$). d_y und d_z sind qualitativ als dimensionslose Faktoren einer charakteristischen Längeneinheit dargestellt.

Abweichungen durch eine Approximation so geglättet werden, dass die gemessene Welligkeit vernachlässigt und lediglich signifikante Abweichungen in Form von Anregungen auf das Fahrzeug wirken.

4.3 Analyse der Fahrzeugschwingungen bei approximierten Schienenabweichungen mit Dierckx-Splines

Der folgende Abschnitt untersucht die Auswirkung von approximierten Schienenabweichungen auf die simulierten Fahrzeugschwingungen (Methode III). Hierzu wird zunächst der Einfluss des Glättungsfaktors S (vgl. Gleichung 2.26) auf die modellierten Abweichungen und resultierend daraus auf die Anregung des Tandemfahrzeugs untersucht. Hieraus wird dann ein für den vorliegenden Anwendungsfall passendes S abgeleitet und für die Approximation der Schienenabweichungen genutzt.

4.3.1 Analyse der Auswirkung des Glättungsfaktors S auf den Schienenverlauf

Abbildung 4.13 zeigt die lateralen Abweichungen der linken und rechten Schiene unter der Verwendung verschiedener Glättungsfaktoren. Hierbei ist deutlich in Abbildung (a) und (c) zu erkennen, dass die modellierten Abweichungen mit steigendem Glättungsfaktor größer werden. So werden die real vermessenen Abweichungen bei $S=2.0$ um bis zu zwanzigfach erhöht. Es zeigt sich auch, dass neben der unverhältnismäßig hohen Vergrößerung der Abweichungen auch der grundsätzliche Verlauf der Schiene beeinflusst wird. Die Detaildarstellungen in Abbildung (b) und (d) zeigen, dass jedoch selbst kleinere getestete Glättungsfaktoren den Verlauf der modellierten Schiene negativ beeinflussen können. So zeigt beispielsweise der Verlauf mit $S=0.02$ bereits Phasenverschiebungen der Hoch- und Tiefpunkte. Es ist ebenfalls zu erkennen, dass es Glättungsfaktoren gibt (beispielsweise $S=0.0002$), die die interpolierten Abweichungen nahezu vollständig, jedoch ohne Welligkeit der Schiene, wiedergegeben können. Identische Schlüsse können aus den in Abbildung 4.14 gezeigten Abweichungen in Vertikalrichtung gezogen werden.

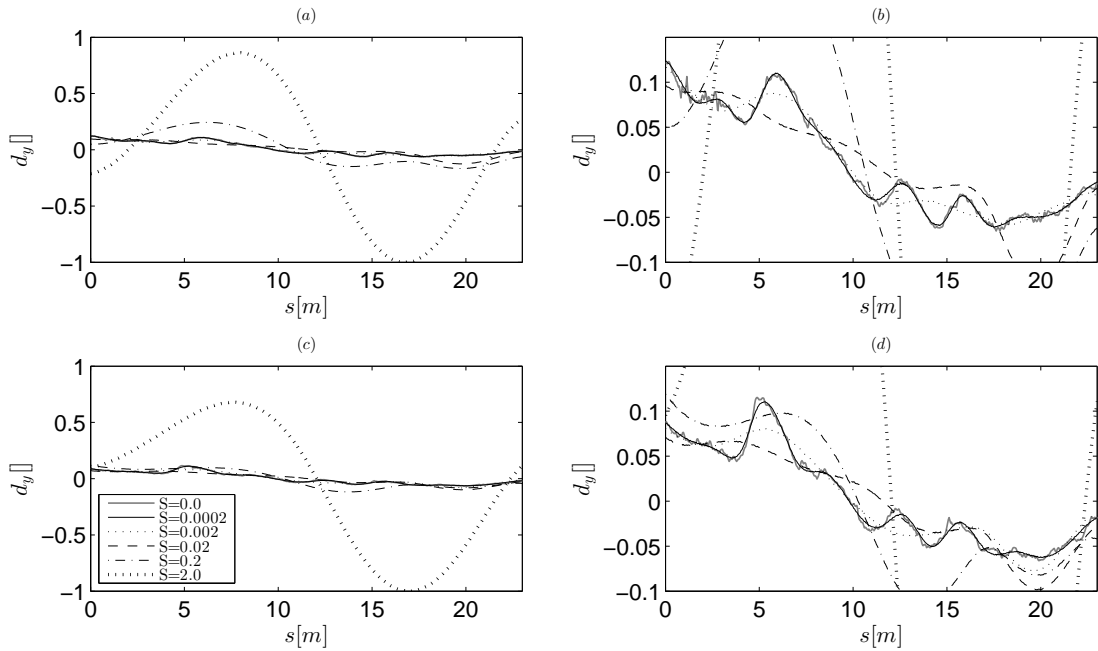


Abbildung 4.13: Untersuchung des Glättungsfaktors S : Schienenabweichungen der rechten (a), (b) - linken (c), (d) Schiene in lateraler Richtung. d_y ist qualitativ als dimensionsloser Faktor einer charakteristischen Längeneinheit dargestellt.

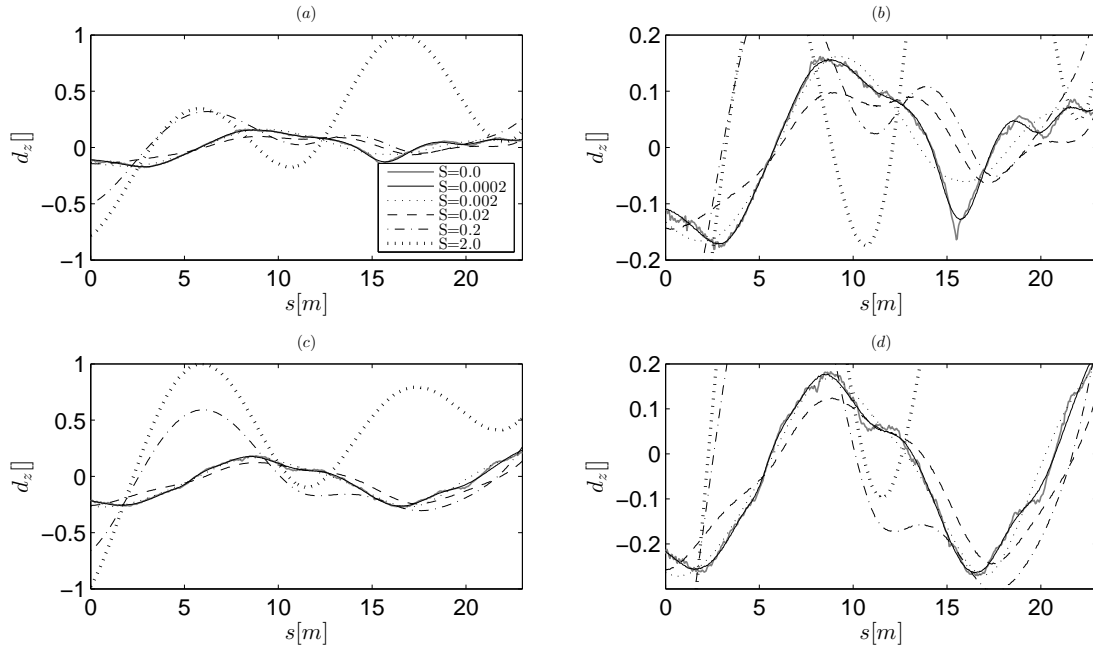


Abbildung 4.14: Untersuchung des Glättungsfaktors S : Schienenabweichungen der rechten (a), (b) - linken (c), (d) Schiene in vertikaler Richtung. d_z ist qualitativ als dimensionsloser Faktor einer charakteristischen Längeneinheit dargestellt.

Abbildung 4.15 zeigt die Lateral- und Vertikalbeschleunigungen eines Tandemfahrzeuges unter der Verwendung von approximierten Schienenabweichungen mit unterschiedlichen Glättungsfaktoren. Deutlich zu erkennen ist, dass durch eine Erhöhung des Glättungsfaktors die Amplituden sowohl in lateraler als auch in vertikaler Richtung verringert werden. Dies ist eine direkte Folge aus dem durch das erhöhte S folgenden glatteren Verlauf der Schiene. Es zeigt sich jedoch ebenfalls, dass es Glättungsfaktoren ($S=0.0002$) gibt, die eine gute Übereinstimmung zwischen den gemessenen und den simulierten Beschleunigungen ermöglichen. Die aus der Berücksichtigung der Schienenwelligkeit entstehenden höherfrequenten Schwingungen im Falle der Interpolation konnten durch die Approximation nahezu vollständig eliminiert werden.

Es lässt sich festhalten, dass es Glättungsfaktoren gibt, die die Schienenwelligkeit vernachlässigt, die signifikanten Abweichungen jedoch weiterhin berücksichtigt. Zu große Glättungsfaktoren führen wiederum zu einer unrealistischen Glättung der Abweichungen und daraus resultierend zur unrealistisch geringen Anregungen der Beschleunigungsamplituden. Darüber hinaus kann festgehalten werden, dass keine pauschale Aussage bzw. keine Berechnungsvorschrift für einen optimalen Glättungsfaktor abgeleitet werden konnte. Der Verfasser weist darauf hin, dass die im Rahmen dieser Dissertationsschrift durchgeführten Arbeiten nicht ausreichen, um hierzu ein abschlie-

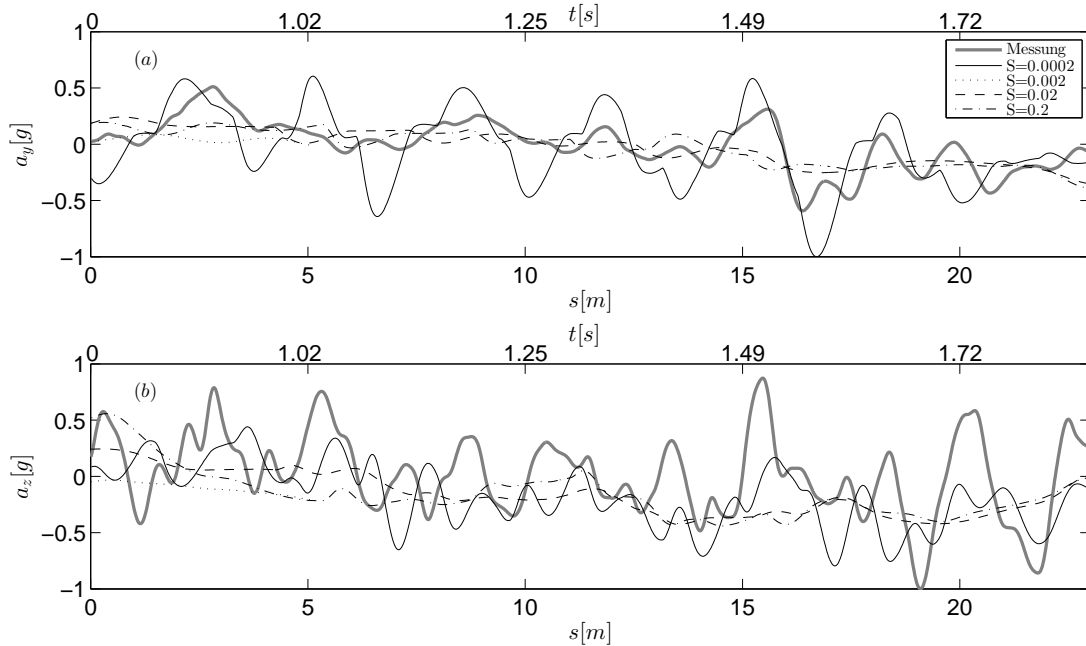


Abbildung 4.15: Lateral- (a) und Vertikalbeschleunigungen (b) bei approximierten Schienenabweichungen mit unterschiedlichen Glättungsfaktoren S

ßendes Urteil abgeben zu können (Vergleich Kapitel 6). Die Wahl eines geeigneten Glättungsfaktors in dieser Arbeit kann allerdings durch einen Vergleich der Abweichungen (vgl. Abbildung 4.13 und 4.14) „von Hand“ durchgeführt werden. Aus den dargestellten Ergebnissen in diesem Abschnitt folgt ein Glättungsfaktor von $S=0.0002$, welcher für den in der vorliegenden Arbeit zu analysierenden Schienenabschnitt ausreichend genaue Ergebnisse liefert.

4.3.2 Analyse der resultierenden Schwingungen bei einer praktikablen Auswahl des Glättungsfaktors ($S=0.0002$)

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt, hat sich im vorliegenden untersuchten Fall ein numerischer Wert des Glättungsfaktors von $S=0.0002$ positiv auf die Wirklichkeitsnähe der simulierten Schwingungen ausgewirkt. Dies soll im Folgenden genauer untersucht werden. Abbildung 4.16 zeigt die simulierten und gemessenen Beschleunigungen sowie die daraus resultierenden Spektraldichten in Lateral- und Vertikalrichtung für die Approximation ($S=0.0002$) mit Dierckx-Splines. Die in (a) dargestellten simulierten Beschleunigungen zeigen einen gut übereinstimmenden Phasenverlauf im Vergleich zur Messung. Lediglich die Amplituden sind, besonders im mittleren Bereich, um bis zu 0.5 g erhöht. Dies zeigt auch der in Abbildung (b) dargestellte Peak bei $\approx 6\text{ Hz}$. Bei den in

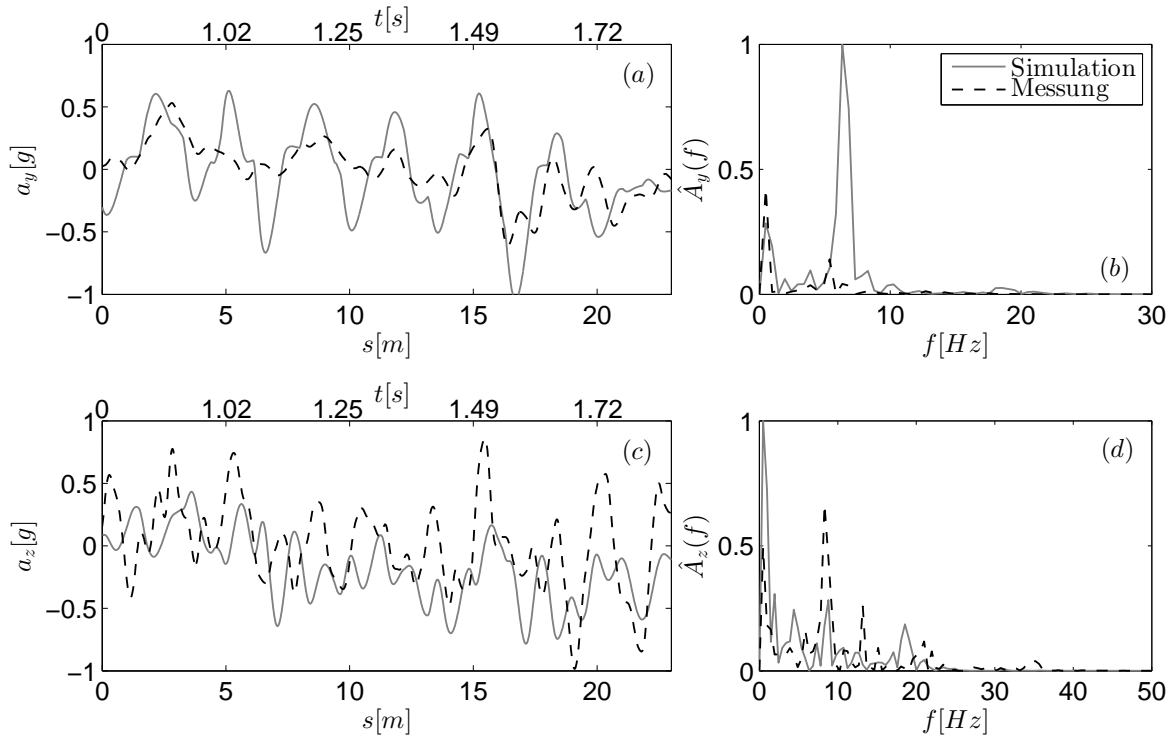


Abbildung 4.16: Vergleich der gemessenen und simulierten Beschleunigungen: laterale (a) - vertikale (c) Beschleunigungen und laterale (b) - vertikale Spektraldichte (d). Abweichungen modelliert mit Dierckx-Splines ($S=0.0002$).

Abbildung (c) dargestellten Vertikalbeschleunigungen zeigt sich hingegen, dass die Amplituden der Messung über den gesamten Bereich von der Messung nicht ganz erreicht werden. Ebenfalls kann im Vergleich der in Abbildung (d) gezeigten Frequenzspektren eine leicht erhöhte Frequenz der Simulation und eine daraus folgende leichte Phasenverschiebung identifiziert werden. Positiv hervorzuheben ist, dass die Approximation und die daraus resultierende Vernachlässigung der Schienenwelligkeit die höherfrequenten Schwingungsanteile von bis zu 150 Hz nahezu vollständig vermieden werden. Dies zeigt sich auch in den in Abbildung 4.17 gezeigten Ergebnissen der Rainflow-Analyse. Hieraus wird deutlich, dass die simulierten Mittelwerte der Lateralschwingungen, dargestellt in Abbildung (b), sowie die Amplituden der Vertikalschwingungen, dargestellt in Abbildung (c), eine gute Übereinstimmung mit der Messung zeigen. Lediglich die Amplituden in Lateral- (a) und die Mittelwerte in Vertikalrichtung (d) sind noch erhöht. Im direkten Vergleich zu Abbildung 4.9 und 4.12 zeigt sich in Abbildung 4.18 der deutlich geglättete Verlauf der modellierten Schienen. Dies ist ebenfalls in den in Abbildung (c) und (d) dargestellten Ableitungen der Abweichungen zu erkennen. Diese sind im Vergleich zur Interpolation um einen Faktor von 2.5 verringert, was in den in (e) und (g) gezeigten Spektraldichten resultiert. Es ist deutlich zu erkennen, dass Anregungen

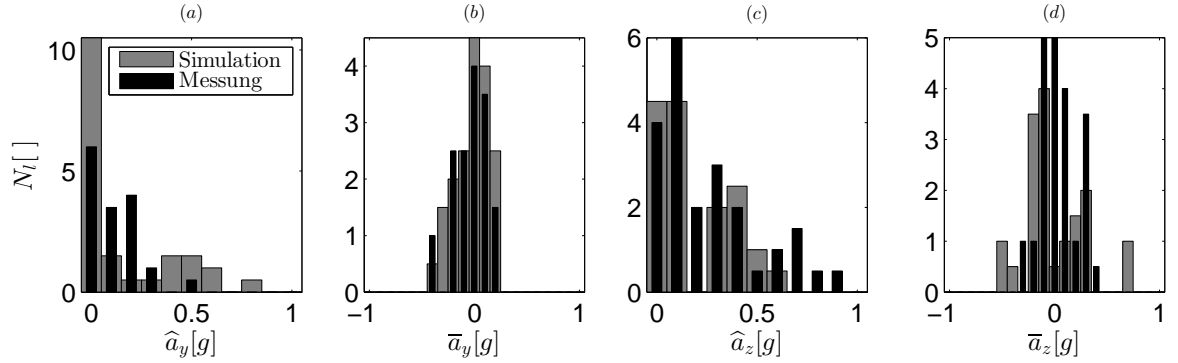


Abbildung 4.17: Rainflow-Analyse der lateralen und vertikalen Mittelwerte (a), (c) - Amplituden (b), (d). Abweichungen modelliert mit Dierckx-Splines ($S=0.0002$).

mit Wellenlängen im Bereich von 10 cm nahezu vollständig eliminiert werden konnten. Die in Abbildung (f) und (h) gezeigten Wellenlängen in einem Bereich zwischen 1 m und ≈ 5 m stellen nun die Anregung des Fahrzeuges dar und resultieren in den in diesem Abschnitt analysierten guten Ergebnissen. Der Verfasser der vorliegenden Dissertationsschrift weist darauf hin, dass die gezeigte Vorgehensweise zur Approximation

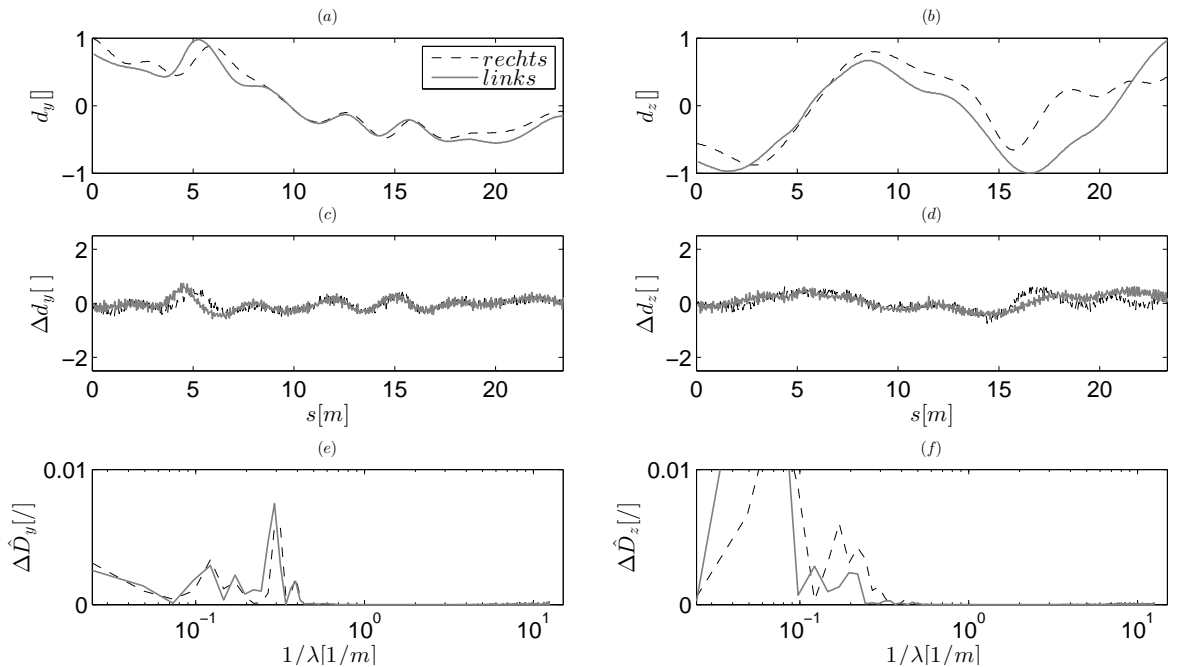


Abbildung 4.18: Abweichungen und Änderung der Abweichungen in lateraler (a), (c) - vertikaler (b), (d) Richtung. Spektraldichte der lateralen (e)- vertikalen (g) Änderungen. Abweichungen modelliert Dierckx-Splines ($S=0.0002$). d_y und d_z sind qualitativ als dimensionslose Faktoren einer charakteristischen Längeneinheit dargestellt.

der Schienenabweichungen auf weiteren Bahnabschnitten getestet wurde⁴. Die Qualität der erzielten Ergebnisse ist hierbei vergleichbar zu den hier dargestellten. Diese Ergebnisse lassen jedoch keinen allgemeinen Schluss zu. So könnte die Nutzung auf anderen Bahnabschnitten auch grundsätzlich zu nicht zufriedenstellenden Ergebnisse führen.

4.4 Analyse und Vergleich der Mess- und Simulationsergebnisse

Der folgende Abschnitt zeigt einen Vergleich der in Kapitel 4 vorgestellten Simulationsergebnisse. Anhand verschiedener Gütekriterien der resultierenden Bewegung (im Folgenden Metrik⁵) werden die Abweichungen der verschiedenen Simulationsergebnisse im Vergleich zu den Messwerten untersucht. Als Metrik werden hierbei die jeweiligen Summen der Absolutwerte folgenden Abweichungen zwischen Simulation und Messung verwendet:

- lateralen Abweichungen im Zeitbereich ($F_{y_{lms}}$),
- lateralen Abweichungen im Frequenzbereich ($F_{y_{psd}}$),
- vertikalen Abweichungen im Zeitbereich ($F_{z_{lms}}$),
- vertikalen Abweichungen im Frequenzbereich ($F_{z_{psd}}$).

Die jeweiligen Metriken werden hierbei mit Hilfe von Gleichung 4.2 und 4.13 bestimmt. Neben diesem qualitativen Vergleich wird ebenfalls die für die Simulation benötigte Rechenzeit als Bewertungskriterium herangezogen.

Tabelle 4.3 zeigt die Auswertung der verschiedenen Metriken für die in Abbildung 4.7, 4.10 und 4.16 gezeigten Simulations- und Messergebnisse. Wie in Zeile 1 zu erkennen, werden die lateralen Beschleunigungen im Vergleich der beiden interpolierenden Verfahren durch Methode *II* um einen Faktor von 1.41 genauer wiedergegeben. Dies kann ebenfalls durch die in Zeile 3 gezeigte 2.13 fach bessere Übereinstimmung der Frequenzen bestätigt werden. Der Vergleich der beiden auf Dierckx-Splines basierenden Verfahren zeigt, dass durch Approximation die Qualität der Ergebnisse nochmals

⁴Interner Bericht Maurer AG

⁵Der Begriff „Metrik“ wird hier im übertragenden Sinne verwendet, d.h. es geht hier nicht um die Stetigkeit und positive Definitheit des Begriffs im streng mathematischen Sinne, sondern vielmehr um die Abbildung eines Funktionsraumes auf ein Skalar, so dass große Werte eine weitere Entfernung von Ideal als kleinere Werte bedeuten.

Metrik	Einheit	Methode <i>I</i>	Methode <i>II</i>	Methode <i>III</i>	$\frac{I}{II}$	$\frac{I}{III}$	$\frac{II}{III}$
		SPS	$S=0$	$S=0.0002$			
$F_{y_{lms}}$	[g]	444.66	312.03	253.99	1.42	1.75	1.23
$F_{z_{lms}}$	[g]	88.97	125.61	70.14	0.71	1.27	1.79
$F_{y_{psd}}$	[]	0.046	0.0216	0.0165	2.13	2.79	1.31
$F_{z_{psd}}$	[]	0.001	$3.74 * 10^{-4}$	$1.12 * 10^{-4}$	2.67	8.93	3.34
t	[s]	986.56	509.98	78.62	1.94	14.48	6.53

Tabelle 4.3: Vergleich der Mess- und Simulationsergebnisse anhand der definierten Metrik sowie der Simulationszeit t

um einen Faktor von 1.23 bzw. 1.31 gesteigert werden kann. Der in Zeile 2 dargestellte Vergleich der Vertikalschwingungen zeigt im Gegensatz, dass die Interpolation mit Dierckx-Splines eine um den Faktor 0.71 verringerte Übereinstimmung im Zeitbereich liefert. Im Frequenzbereich ist dieser Zusammenhang nicht erkennbar. Auch in Vertikalrichtung kann durch Nutzung von approximierten Dierckx-Splines das Ergebnis im Vergleich zu Methode *II* erneut nochmals um einen Faktor von 1.79 bzw. 3.34 gesteigert werden. Neben den dargestellten qualitativen Unterschieden im Zeit- und Frequenzbereich ist die für die Simulation benötigte Rechenzeit ebenfalls ein wichtiges Bewertungskriterium für die Wahl einer geeigneten Modellierungsmethode zur Abbildung von Schienenabweichungen. Zeile 5 aus Tabelle 4.3 zeigt deutlich, dass sich die Rechenzeit im Vergleich der beiden interpolierenden Verfahren bereits um einen Faktor von 1.94 unterscheidet. Methode *III* beschleunigt die Rechenzeit im Vergleich zur schnelleren der beiden interpolierenden Methoden erneut um das 6.53-fache. Dies verdeutlicht erneut den Vorteil bei der approximierten Modellierung von realen Schienenabweichungen.

Abschließend lässt sich festhalten, dass die Approximation von Schienenabweichungen und die daraus resultierende realitätsnahe Anregung über den Kontakt zwischen Rad und Schiene, die Basis für realitätsnahe Simulationsergebnisse und schnelle Simulationszeiten bei der Simulation von Achterbahnfahrzeugen geben kann. Die im Rahmen dieser Dissertationsschrift durchgeführten Arbeiten reichen jedoch nicht aus, um abschließende Empfehlungen zu dieser Thematik geben zu können. So kann es durchaus sein, dass zukünftig bessere interpolierende Verfahren entwickelt werden, welche die ruckartigen Übergänge zwischen Schienenabschnitten mit elementarer Geometrie „verschleifen“ und somit die Erregung nicht wahrheitsgemäßer höherfrequenter Schwingungen vermeiden. Auch kann es sein, dass durch Verwendung „intelligenter“ Kontakt-

modelle unerwünschte höherfrequente Erregungen auf der Modellseite herausgefiltert werden, so dass eine Glättung mittels Dierckx-Splines nicht mehr nötig ist. Diese Betrachtungen führen jedoch über den Rahmen der vorliegenden Dissertationsschrift hinaus und können in zukünftigem Arbeiten verfolgt werden (Vergleich Kapitel 6).

Basierend auf den Erkenntnissen diese Kapitels, sollen im folgenden Kapitel die angenommenen Kontaktkraftparameter durch eine Parameteridentifikation optimiert und die Qualität der Ergebnisse somit weiter verbessert werden.

5 Identifikation von Modellparametern anhand von „Heatmaps“

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Identifikation von Modellparametern anhand gemessener Schwingungen. Hierzu wird zunächst eine für das Konzept notwendige Metrik eingeführt. Im Anschluss daran wird die Visualisierung der Metriken in Form von Wärmebildern bzw. Hitzekarten (im Folgenden „*engl.: Heatmaps*“) dargestellt. Basierend auf einer detaillierten Schwingungsanalyse des Tandemfahrzeugmodells, wird danach die Identifikationsreihenfolge der zu identifizierenden Modellparameter bestimmt. Das hieraus abgeleitete Konzept wird dann anhand approximierter Schienenabweichungen exemplarisch illustriert. Durch Variation der Gewichtungsfaktoren der genutzten Metrik wird die Sensitivität des Gesamtkriteriums bzgl. der Modellparameter und der daraus resultierenden Simulationsergebnisse untersucht. Das Kapitel schließt mit einem Vergleich der erzielten Ergebnisse.

5.1 Analyse verschiedener Metriken zur Identifikation von Modellparametern mit Hilfe von Heatmaps

Im vorliegenden Abschnitt wird ein neues Konzept zur Bestimmung von Modellparametern anhand des Vergleiches zwischen Simulations- und Messwerten vorgestellt. Im Gegensatz zu klassischen Verfahren, welche anhand einer Optimierung der Designparameter basierend auf einer aus jeweils einem Simulationslauf errechnete Kostenfunktion vorgehen, soll durch das hier vorgestellte Konzept eine semi-automatische Parameteridentifikation ermöglicht werden, in der der Nutzer zunächst aus verschiedenen Heatmaps jene Parameterbereiche auswählt, in denen die korrekten Werte vermutet werden, und anschließend ggf. eine Feinoptimierung in der Umgebung dieser Bereiche vorgenommen wird. Da die in der vorliegenden Arbeit in Abschnitt 4.3.2 gezeigte Simulation eine Rechenzeit von circa 79 Sekunden für ein circa 25 Meter langes Bahnstück vorweist, erscheint ein solches semi-automatisches Auswertungskonzept zur Identifikation der Modellparameter einer so komplexen Interaktion wie der hier vorliegenden notwendig.

5.1.1 Definition einer Metrik zur Identifikation von Parametern

Die in den Abschnitten 4.1.1 und 4.1.2 gezeigten Methoden zum Vergleich zweier Signale bilden die Grundlage für die im neu entwickelten Identifikationskonzept genutzte

Metrik. Hierbei wird durch lineare Kombinationen der gemäß Gleichung 4.2 und 4.13 eingeführten Metriken jeweils im Zeit- und Frequenzbereich jeweils für die Lateral- und Vertiaklkomponente eine Gesamtmetri

$$F = \alpha_{y_{lms}} \frac{F_{y_{lms}}}{\hat{F}_{y_{lms}}} + \alpha_{z_{lms}} \frac{F_{z_{lms}}}{\hat{F}_{z_{lms}}} + \alpha_{y_{psd}} \frac{F_{y_{psd}}}{\hat{F}_{y_{psd}}} + \alpha_{z_{psd}} \frac{F_{z_{psd}}}{\hat{F}_{z_{psd}}} \quad (5.1)$$

gebildet. Durch die Division der einzelnen Summanden durch ihren jeweiligen Maximalwert ($\hat{\cdot}$) können diese auf einen Höchstwert von eins normiert werden (vgl. Abbildung 5.1 (e)-(h)). Anschließend kann durch die Faktoren $\alpha_{y_{lms}}$, $\alpha_{z_{lms}}$, $\alpha_{y_{psd}}$ und $\alpha_{z_{psd}}$ ¹ eine unterschiedliche Gewichtung der jeweiligen Summanden der Metrik realisiert werden. Die in Gleichung 5.1 dargestellte Metrik in Form einer einzigen Kennzahl F wird im Folgenden dazu genutzt, um eine Modellparameterkombination zu identifizieren, die die in Kapitel 4 dargestellten Simulationsergebnisse sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich verbessern soll.

5.1.2 Visualisierung und Auswertung der Metrik mit Hilfe von Heatmaps

Wie in Abschnitt 5.1.1 gezeigt, kann die Differenz zweier Signale durch eine Metrik in Form einer einzigen Kennzahl beschrieben werden. Zur vereinfachten graphischen Auswertung verschiedener Kennziffern wird die in Abbildung 5.1 gezeigte Darstellung

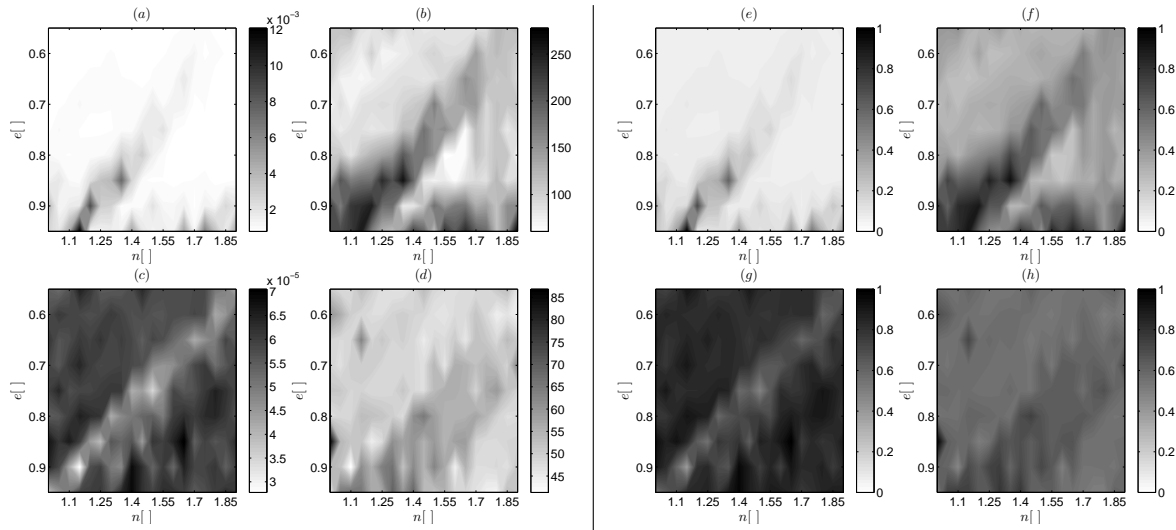


Abbildung 5.1: Summe der Fehlerquadrate F: für eine Variation von Stoßzahl e und Exponent n , visualisiert als Heatmap: $F_{y_{psd}}$ normal (a) - normiert (e); $F_{y_{lms}}$ normal (b) - normiert (f); $F_{z_{psd}}$ normal (c) - normiert (g); $F_{z_{lms}}$ normal (d) - normiert (h)

¹In Verbindung mit einer Metrik beschreibt α_i keinen Freiheitsgrad (vgl. Abschnitt 3.3.2).

in Form von Heatmaps eingeführt. Hierbei werden auf die x- und y-Achse zwei der zu identifizierenden Parameter (beispielsweise Exponent n und Stoßzahl e) gegeneinander aufgetragen. Dann wird für alle möglichen Parameterkombinationen eines vorher festzulegenden Variationsbereiches mit einer ebenfalls vorher zu wählenden Änderungsschrittweite (vgl. Tabelle 5.1) eine Simulation des Tandemfahrzeugmodells durchgeführt. Basierend auf dem jeweiligen Simulationsergebnis wird danach die zugehörige Metrik F berechnet und in einem Ergebnisvektor abgelegt. Nach der Simulation aller Parameterkombinationen können die errechneten Kennzahlen einer Grauwertskala zugewiesen, in einer Heatmap visualisiert und untereinander verglichen werden. Helle Bereiche stellen hierbei Kennzahlen mit geringen („guten“), dunkle Bereiche Kennzahlen mit hohen („schlechten“) Werten dar. Abbildung 5.1 (a), (b), (c) und (d) zeigt exemplarisch die Werte für die Summanden $F_{y_{lms}}$, $F_{y_{psd}}$, $F_{z_{lms}}$ sowie $F_{z_{psd}}$ aus Gleichung 5.1. Bei dem Vergleich der Grauwertskalen ist zu erkennen, dass sich die jeweiligen Wertebereiche in ihren Minimal- bzw. Maximalwerten deutlich unterscheiden. Um jedem Summand bei der späteren Addition eine identische Gewichtung zu ermöglichen, werden, wie in Abbildung (e), (f), (g) und (h) gezeigt, die jeweiligen Teilfehler mit Hilfe ihres jeweiligen Maximalwertes normiert. Aus der Addition aller vier normierten Ergebnisvektoren folgt die in Abbildung 5.2 (a) gezeigte Heatmap des Gesamtfehlers F mit einer Grauwert- bzw. Fehlerskala von 0 bis 4. Identisch zu der gezeigten Vorgehensweise kann der normierte Fehler F bei Variation lediglich eines Modellparameters, beispielsweise der Steifigkeit k , berechnet werden. Zur Visualisierung des Fehlers wird dann die in Abbildung 5.2 (b) gezeigte klassische Darstellung als x-y Diagramm gewählt.

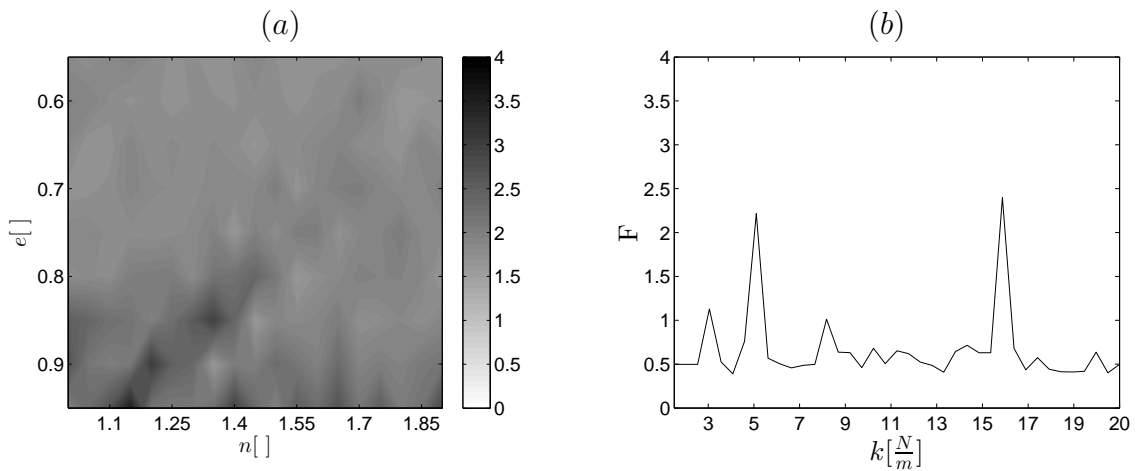


Abbildung 5.2: Summe der Fehlerquadrate F : für eine Variation von Stoßzahl e und Exponent n , visualisiert als Heatmap: (a) - für eine Variation der Steifigkeit k , visualisiert als x-y Diagramm (b)

5.1.3 Sensitivitätsanalyse der verschiedenen Kontaktkraftparameter durch die Auswertung der simulierten Schwingungen des Modells

Das in der vorliegenden Arbeit genutzte Hysterese-Kontaktkraftmodell benötigt neben den in den generalisierten Koordinaten vorhandenen Größen d , \dot{d} und \dot{d}^- drei konstante Parameter k , n und e zur Berechnung der Kontaktkraft zwischen Rad und Schiene (vgl. Gleichung 3.34). Um die Gesamtanzahl der zu identifizierenden Parameter handhabbar zu halten, wird für jeden Radtyp (Lauf-, Seiten-, Gegenrad) jeweils ein identischer Parametersatz genutzt. Hieraus folgen somit in Summe die in Tabelle 5.1 gezeigten neun zu identifizierenden Modellparameter. Die in Abschnitt 5.1.2 eingeführten Visualisierungen mit Hilfe von Heatmaps und x-y Diagrammen ermöglichen die Darstellung von Metriken bei Variation eines bzw. zweier Modellparameter. Mit diesen ist es somit nicht möglich, alle neun zu identifizierenden Modellparameter in einem Simulationslauf zu variieren und die daraus resultierenden Ergebnisse bzw. Metriken gleichzeitig visuell auszuwerten. Des Weiteren wären Simulationen und eine daran anschließende Analyse aller möglichen Kombinationen aufgrund der extrem hohen Anzahl $((9^3) * (19^3) * (39^3) \approx 3 * 10^{11})$ nicht praktikabel. Um eine für den vorliegenden Anwendungsfall sinnvolle Rangfolge der zu identifizierenden Parameter zu finden, soll im Folgenden der Einfluss der verschiedenen Modellparameter auf die in den simulierten Beschleunigungen enthaltenen Frequenzen und Amplituden untersucht und daraus anschließend eine Eingrenzung der Suchbereiche und sinnvollen Gitterpunkte für die Auswertung abgeleitet werden. Zur Analyse wird das Tandemfahrzeug hierzu auf einer geraden Teststrecke mit konstanter Geschwindigkeit bewegt und an Position s^* an dem in Abbildung 5.3 (a) und (b) schematisch gezeigten Angriffspunkt exemplarisch mit einer Kraft angeregt. Die Größe der Kraft entspricht hierbei einer realen Schienenabweichung von 1 cm und der daraus resultierenden Kraft einer linearen Feder mit der

Rad	Federst. k	Variat.- bereich	#	Stoßz. e	Variat.- bereich	#	Exp. n	Variat.- bereich	#
	$1.000.000[\frac{N}{m}]$			$[-]$			$[-]$		
LR	k_{LR}	0.5-20.0	39	e_{LR}	0.95-0.55	9	n_{LR}	1.0-1.9	19
SR	k_{SR}	0.5-20.0	39	e_{SR}	0.95-0.55	9	n_{SR}	1.0-1.9	19
GR	k_{GR}	0.5-20.0	39	e_{GR}	0.95-0.55	9	n_{GR}	1.0-1.9	19

Tabelle 5.1: Variationsbereiche der zu identifizierenden Parameter der Rad-Schiene-Kontaktkraftelemente

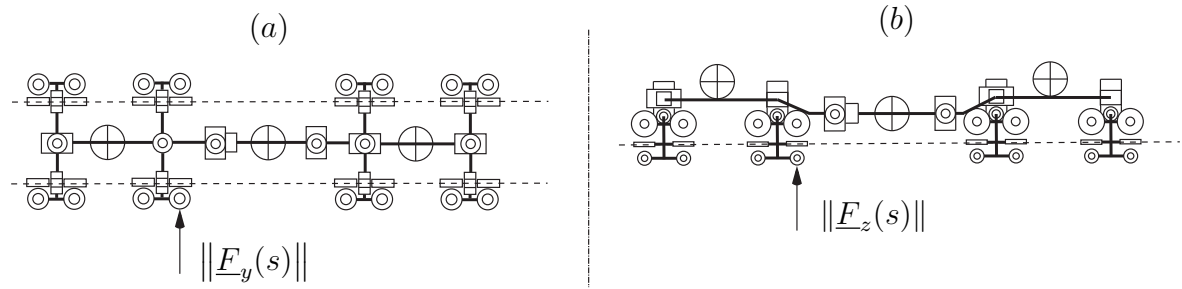


Abbildung 5.3: Angriffspunkt der Kraft in Lateral- (a) - Vertikalrichtung (b)

in Tabelle 4.2 dargestellten Federsteifigkeit. Hieraus folgt

$$\|\underline{F}_i(s)\| = 3.500.000 \frac{N}{m} \cdot 0.01m = 35000 N \quad (5.2)$$

für die Kraft. Zur Analyse der Auswirkungen auf Frequenz und Amplitude werden bei Anregung mit $\|\underline{F}_y(s)\|$ in lateraler Richtung die Modellparameter k_{SR} , e_{SR} und n_{SR} der Seiten- und bei Anregung in vertikaler Richtung mit $\|\underline{F}_z(s)\|$ die Modellparameter k_{LR} , e_{LR} und n_{LR} der Laufräder verändert. Zur Messung der Beschleunigungen dient das in Abbildung 4.6 gezeigte Koordinatensystem S_3 . Abbildung 5.4 zeigt die aus der Untersuchung resultierenden Verläufe der Spektraldichte unter Variation der Modellparameter der Laufräder (rechte Seite) bzw. Seitenräder (linke Seite).

(a) Einfluss der Federsteifigkeit k :

Die in Abbildung (a) dargestellten Spektraldichten der Lateralbeschleunigung zeigen über den gesamten Variationsbereich der Federsteifigkeit k einen nahezu konstanten Frequenzgang. Ähnlich hierzu zeigt der in Abbildung (b) dargestellte Frequenzgang der Vertikalbeschleunigungen über den Variationsbereich wenige Abweichungen. Beide Abbildungen zeigen jedoch auch deutlich, dass die jeweiligen Amplitudenwerte durch eine Anpassung der Federsteifigkeit beeinflusst werden können.

(b) Einfluss der Stoßzahl e :

Die in Abbildung (c) und (d) gezeigten Verläufe der Spektraldichte der Lateral- und Vertikalbeschleunigungen zeigen bei der Variation der Stoßzahl e ein ähnliches Verhalten. So ist über den gesamten Variationsbereich der Frequenzgang nahezu unverändert. Der Einfluss auf die Amplituden ist jedoch signifikant. So zieht eine Verringerung der Stoßzahl sowohl in Lateral- als auch in Vertikalrichtung eine deutliche Verringerung der Amplitude nach sich.

(c) Einfluss des Exponenten n :

Im Gegensatz zu den zuvor analysierten Parametern k und e zeigt sich bei den in Abbildung (e) und (f) dargestellten Spektraldichten, dass sich durch eine Änderung des Exponenten n nicht nur die Amplituden ändern, sondern auch die Peaks im Frequenzgang verschoben werden können. Durch die Erhöhung des Exponenten können die abgebildeten Frequenzen deutlich verringert werden.

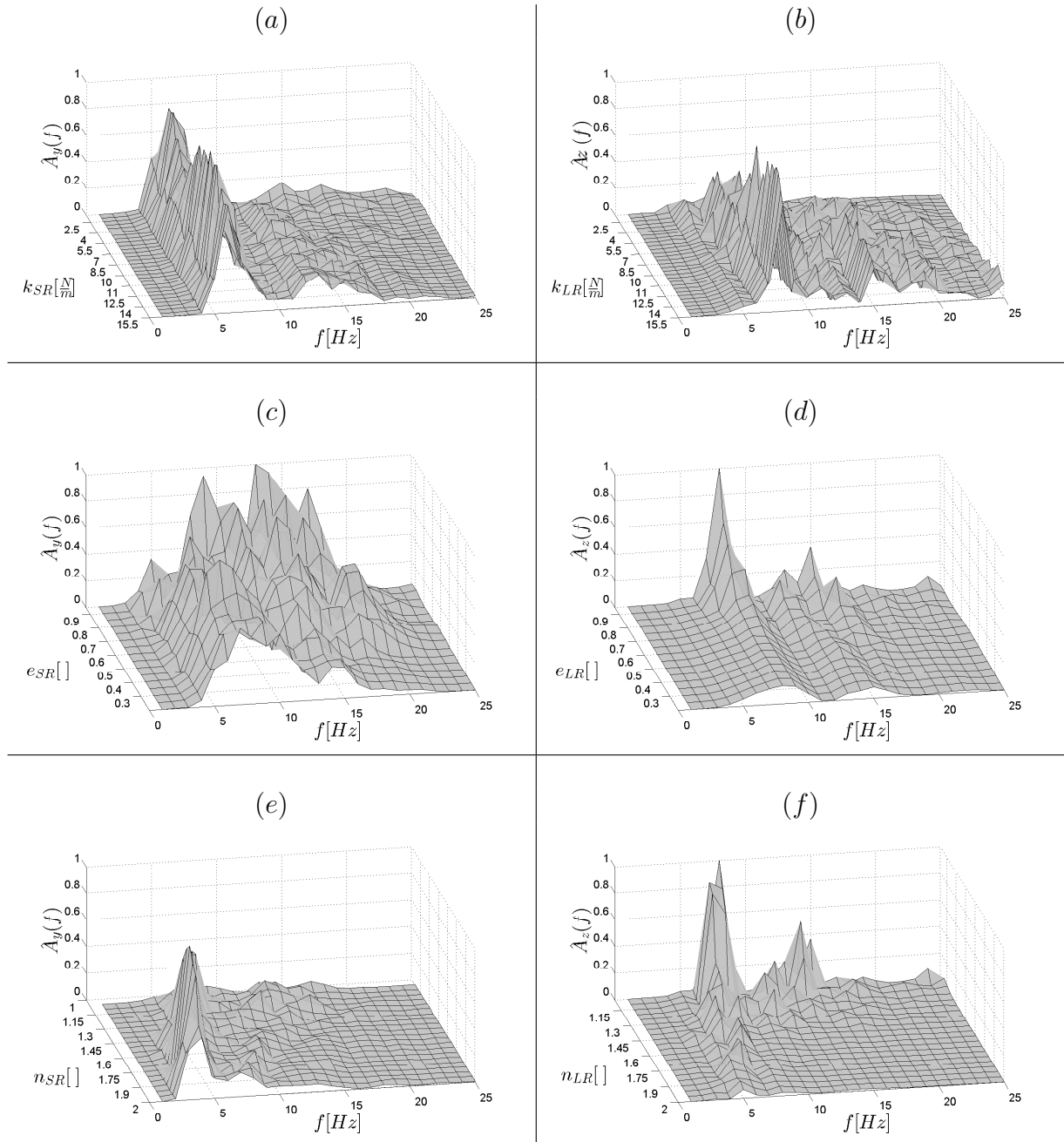


Abbildung 5.4: Analyse der Stoßantwort: Variation der Steifigkeit k , der Stoßzahl e und des Exponenten n in lateraler (a), (c), (e) - vertikaler (b), (d), (f) Richtung

(d) Auswertung und Diskussion der Ergebnisse:

Aus den durchgeführten Vergleichen lässt sich erkennen, dass durch Variation der Federsteifigkeit k sowie der Stoßzahl e lediglich ein geringer Einfluss auf die in den simulierten Beschleunigungen enthaltenen Frequenzen genommen werden kann. Die Schwingungsamplituden können wiederum durch beide Parameter, hierbei signifikanter durch die Stoßzahl, in ihrem Maximalwert beeinflusst werden. Durch Variation des Exponenten n ist zusätzlich eine Verschiebung der Frequenzen der Maxima möglich.

Die Analyse der gezeigten Frequenzspektren verdeutlicht, dass die verschiedenen Parameter des Kontaktkraftmodells die Simulationsergebnisse unterschiedlich beeinflussen. Aus den gewonnenen Erkenntnissen lässt sich als eine Möglichkeit unter vielen das in Abbildung 5.5 gezeigte Ablaufdiagramm zur semi-automatischen Identifikation der betrachteten Modellparameter ableiten. Hierbei wird, basierend auf den in Tabelle 4.2 dargestellten Startwerten, zunächst die Stoßzahl und der Exponent der Laufräder

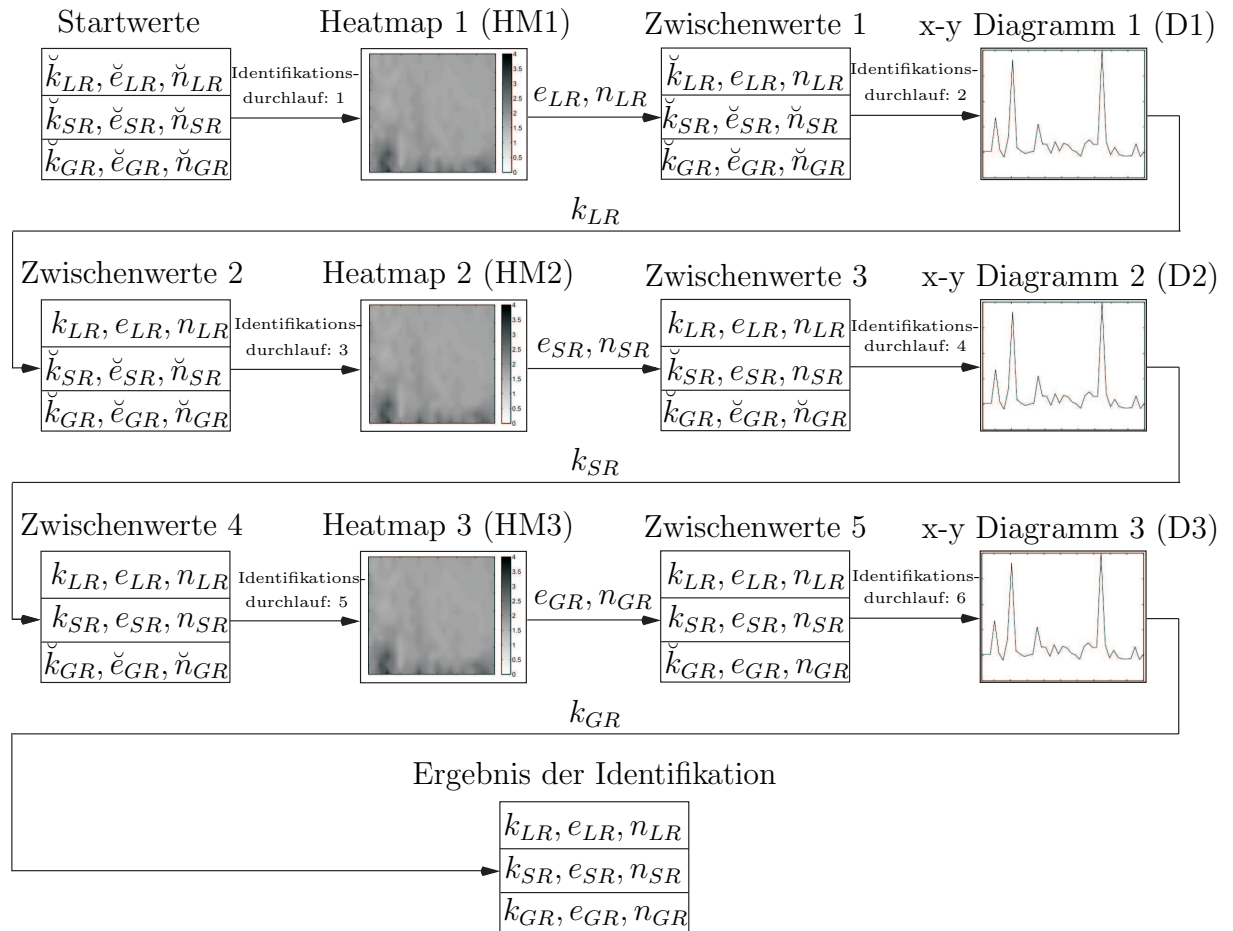


Abbildung 5.5: Ablaufdiagramm der Parameteridentifikation

in Identifikationsdurchlauf 1 variiert und die aus den jeweiligen Simulationsergebnissen resultierende Metrik mit Hilfe von Heatmap 1 ausgewertet. Ziel ist hierbei die Bestimmung der Stoßzahl e_{LR} und Exponent n_{LR} . Im zweiten Identifikationsdurchlauf wird durch Variation der Federsteifigkeit und der daran anschließenden Auswertung der Simulationsergebnisse mit Hilfe von x-y Diagramm 1 die Federsteifigkeit k_{LR} mit geringstem Fehler F ermittelt². Die entwickelte Vorgehensweise wird anschließend in identischer Reihenfolge für die Parameter der Seiten- und Gegenräder durchgeführt und resultiert in neun neuen Modellparametern als Ergebnis der Identifikation. Dadurch kann die Gesamtanzahl der notwendigen Simulationsdurchläufe auf $(3*((9*19)+39))$ 630 Fälle reduziert werden. Der Verfasser der vorliegende Dissertationsschrift weist darauf hin, dass das gezeigte Konzept lediglich eine mögliche Identifikationsreihenfolge darstellt. Die hieraus identifizierten Parameter sind somit als ein Satz unter vielen zu verstehenden, die die Übereinstimmung zwischen Simulations- und Messwerten verbessern, erheben aber nicht den Anspruch darauf die optimalen Parameter zu sein. Weitere Betrachtungen führen über den Rahmen der vorliegenden Dissertationsschrift hinaus und können in zukünftigen Arbeiten weiterverfolgt werden (vgl. Kapitel 6).

5.2 Verifikation des entwickelten Identifikationskonzeptes am Beispiel von approximierten Schienenabweichungen

Das im vorherigen Abschnitt eingeführte Konzept zur semi-automatischen Identifikation von Modellparametern soll im Folgenden mit Hilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 4.3 sowie realen Messwerten getestet werden. Basierend auf den Erkenntnissen aus Kapitel 4 werden die realen Schienenabweichungen mit Hilfe von Dierckx-Splines mit einem Glättungsfaktor von $S=0.0002$ approximiert.

5.2.1 Identifikation neuer Modellparameter

Abbildung 5.6 zeigt die Auswertung der Metriken aller im Ablaufdiagramm 5.5 durchgeführten Simulationsläufe des Fahrzeugmodells. Zur Bestimmung des Gesamtmetrik F werden zunächst alle Gewichtungsfaktoren α_i aus Gleichung 5.1 gleich eins gewählt und somit keine spezielle Gewichtung der verschiedenen Metriken vorgegeben. Tabelle 5.2 fasst die Entwicklung der aus jedem Identifikationsdurchlauf abgeleiteten Modellpara-

²Es wird darauf hingewiesen, dass aus den gezeigten Heatmaps und Plots kein globales Minimum identifiziert werden konnte. Somit wird im folgenden jeweils das Parameterpaar bzw. der Parameter mit dem zugehörigen geringsten F gewählt.

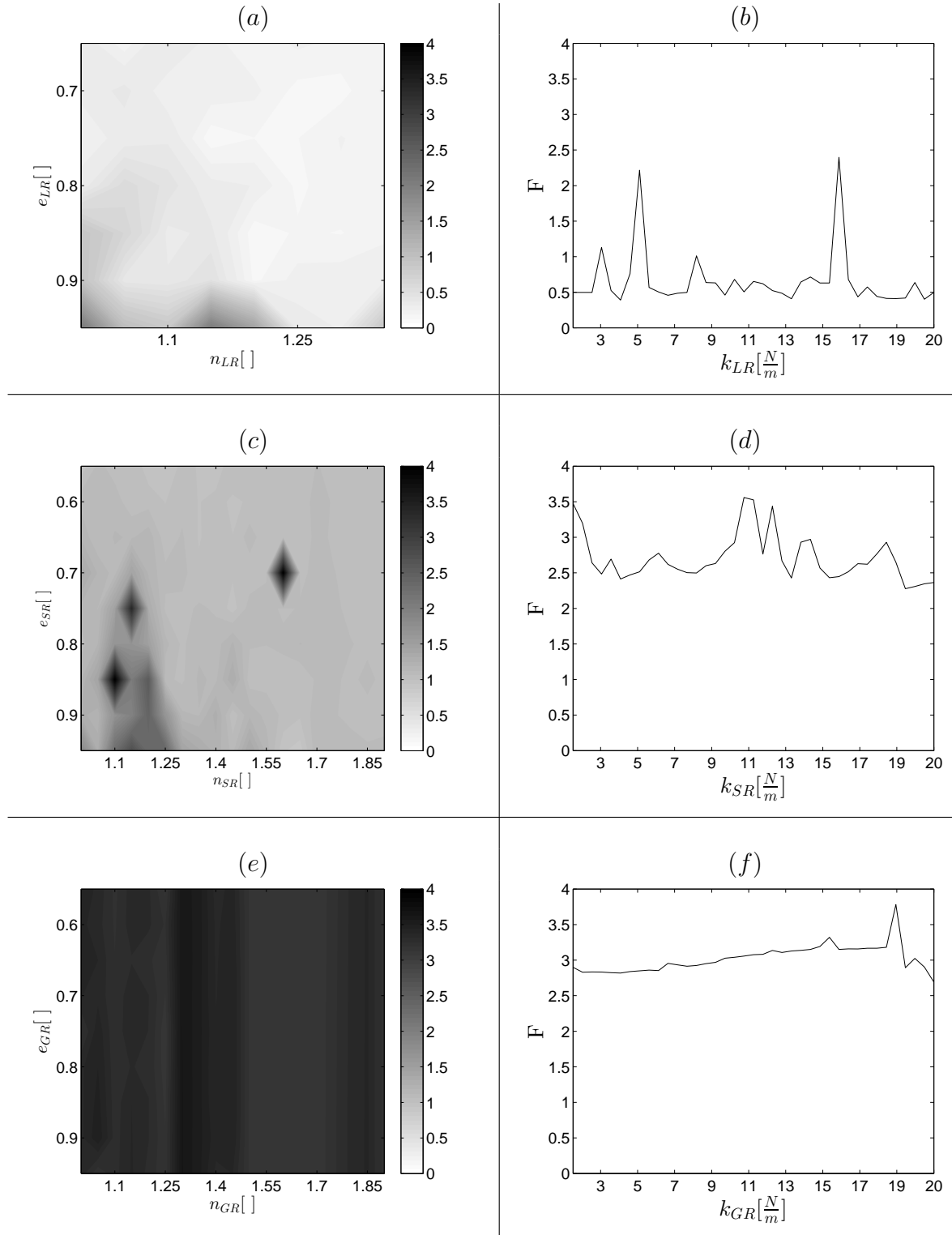


Abbildung 5.6: Auswertung der Metrik mit Heatmap 1 (a), Heatmap 2 (c), Heatmap 3 (e) - x-y Diagramm 1 (b), x-y Diagramm 2 (d), x-y Diagramm 3 (f)

meter zusammen. Um die Auswirkung auf die Simulationsergebnisse direkt bewerten zu können, werden basierend auf den jeweiligen Parametern in einer Zeile die zugehörigen

#	Modellparameter									Metrik			
	k_{LR}	e_{LR}	n_{LR}	k_{SR}	e_{SR}	n_{SR}	k_{GR}	e_{GR}	n_{GR}	$F_{y_{lms}}$	$F_{z_{lsm}}$	$F_{y_{psd}}$	$F_{z_{psd}}$
SW	3.5	0.75	1.125	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	253.99	70.14	0.0165	$1.12 \cdot 10^{-4}$
HM1	3.5	0.75	1.15	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	96.57	53.57	0.0027	$8.15 \cdot 10^{-5}$
D1	3.5	0.75	1.15	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	96.57	53.57	0.0027	$8.15 \cdot 10^{-5}$
HM2	3.5	0.75	1.15	14.0	0.95	1.65	3.5	0.5	1.6	137.89	40.82	0.0023	$7.65 \cdot 10^{-5}$
D2	3.5	0.75	1.15	18.5	0.95	1.65	3.5	0.5	1.6	111.27	47.82	$9.21 \cdot 10^{-4}$	$8.56 \cdot 10^{-5}$
HM3	3.5	0.75	1.15	18.5	0.95	1.65	3.5	0.6	1.55	110.81	47.75	$9.15 \cdot 10^{-4}$	$8.53 \cdot 10^{-5}$
D3	3.5	0.75	1.15	18.5	0.95	1.65	20.0	0.6	1.55	104.79	44.59	$9.32 \cdot 10^{-4}$	$6.24 \cdot 10^{-5}$
Verringerung der Metrik von SW zu D3 um:										58.7%	36.4%	98.1%	44.3%

Tabelle 5.2: Entwicklung der Modellparameter und die daraus folgende Änderung der Metriken durch Anwendung der neuen Identifikationsmethode

Minimalwerte der Metriken zum direkten Vergleich angegeben. Die zu den Minimalwerten zugehörigen Parameter dienen dann als Ausgangspunkt für den nächsten Identifikationsdurchlauf. Es zeigt sich, dass durch die Anpassung der Modellparameter mit Hilfe des vorgestellten neuen Konzeptes die Simulationsergebnisse und somit die Metriken deutlich verbessert werden können. So kann nach den sechs Identifikationsdurchläufen (Zeile 1 (SW) bis Zeile 7 (D3)) eine Verbesserung der Simulationsergebnisse von bis zu 58.7 % im Zeitbereich und von bis zu 98.1 % im Frequenzbereich erzielt werden. Es zeigt sich ebenfalls, dass es sowohl Parameter gibt, die sich deutlich ändern, als auch solche, die durch die Identifikation nichtmehr angepasst werden. Dies ist auf eine gute bzw. schlechte Wahl der Startwerte am Anfang der Identifikation zurückzuführen.

5.2.2 Verifikation und Validierung der neuen Simulationsergebnisse

Abbildung 5.7 zeigt die simulierten und gemessenen Beschleunigungen und die daraus resultierenden Spektraldichten in Lateral- und Vertikalrichtung. Neben den neu erzeugten, auf den aus Abschnitt 5.2.1 identifizierten Modellparametern basierenden Simulationsergebnissen sind ebenfalls zum Vergleich die Ergebnisse aus Abschnitt 4.3.2 zum direkten Vergleich dargestellt. Hierbei zeigt Abbildung (a), dass durch die Identifikation der neuen Modellparameter die Lateralbeschleunigungen deutlich besser abgebildet

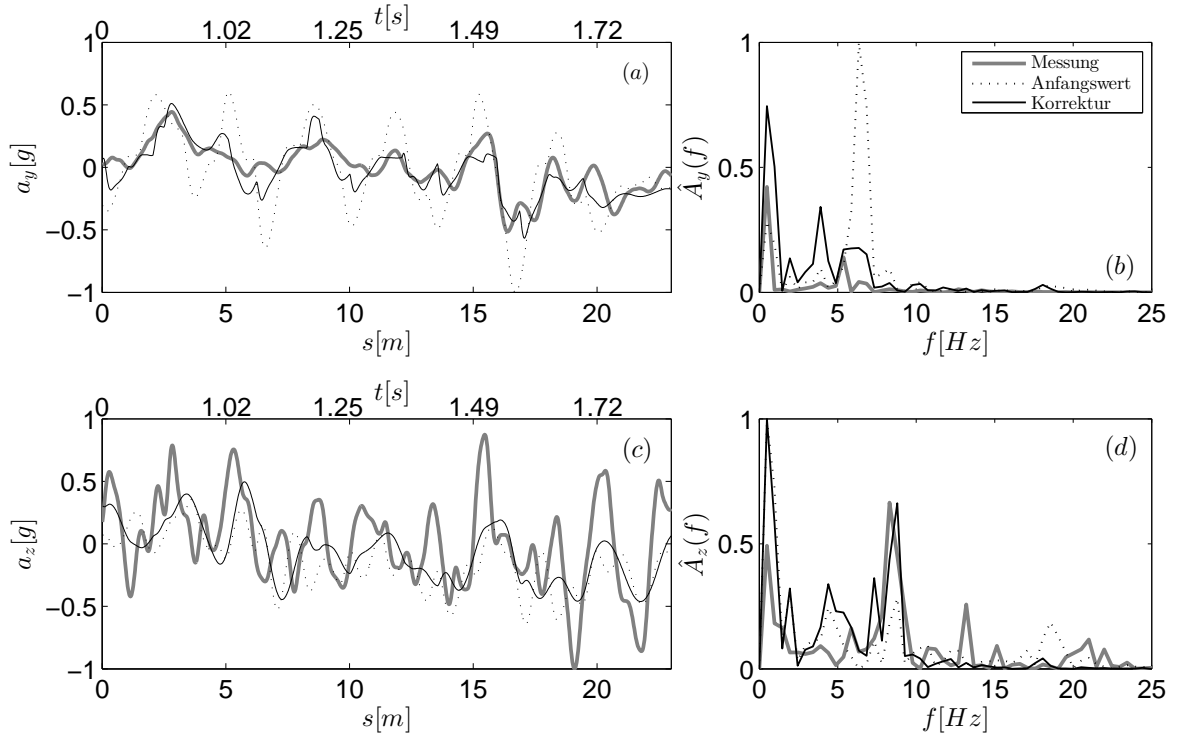


Abbildung 5.7: Verifikation und Validierung der neuen Simulationsergebnisse: laterale (a) - vertikale (c) Beschleunigungen und laterale (b) - vertikale Spektraldichte (d). Abweichungen modelliert mit Dierckx-Splines ($S=0.0002$). Berechnung der Metrik mit $\alpha_{y_{lms}}=1$, $\alpha_{z_{lms}}=1$, $\alpha_{y_{psd}}=1$, $\alpha_{z_{psd}}=1$

werden können. So können die zuvor um bis zu 0.5 g erhöhten Amplituden um über 50 % reduziert und somit auf maximal 0.2 g Abweichung an die Messungen angeglichen werden. Dies zeigt sich auch in dem in Abbildung (b) dargestellten, deutlich reduzierten Peak bei 6 Hz der Spektraldichte. Im Gegensatz hierzu zeigt die in Abbildung (c) dargestellte Beschleunigung in Vertikalrichtung, dass diese nicht im gleichen Maße verbessert werden kann. Lediglich im ersten Drittel zeigt sich eine bessere Übereinstimmung zwischen Simulation und Messung. Dies ist ebenfalls in der in Abbildung (d) gezeigten Spektraldichte ersichtlich, die lediglich im Bereich von 10 Hz bis 20 Hz eine leicht verbesserte Übereinstimmung zeigt.

Zum Vergleich wurde das vorgestellte Identifikationskonzept ebenfalls für eine Identifikation von Modellparametern mit interpolierten Schienenabweichungen (vgl. Abschnitt 2.4.3 Methode I, II) genutzt. Die identifizierten Parameter sowie die Auswirkung auf die Simulationsergebnisse und die Metriken sind in Anhang A.1 und A.2 dargestellt. Es zeigt sich, dass relative Verbesserungen mit ähnlichen Größenordnungen wie den in Tabelle 5.2 dargestellten erzielt werden können, sich das beste Gesamtergebnis jedoch wie bereits ausführlich diskutiert mit approximierenden Splines einstellt.

5.2.3 Auswertung der Identifikationsergebnisse

Abschnitt 5.2 zeigt, dass durch Nutzung von neuen Modellparametern, die durch Anwendung des in der vorliegenden Arbeit entwickelten Identifikationskonzeptes bestimmt werden, die Übereinstimmung zwischen Simulationsergebnissen und Messung im Zeit- und im Frequenzbereich verbessert werden kann. Besonders in Lateralrichtung tragen die neuen Modellparameter signifikant zur verbesserten Übereinstimmung bei. Es zeigt sich jedoch auch, dass durch die neuen Parameter lediglich eine geringe Verbesserung der Vertikalbeschleunigungen zu erzielen ist. Somit ist zu prüfen, ob durch eine Anpassung der Metrik eine bessere Übereinstimmung erreicht werden kann.

5.3 Analyse von Metrikanpassungen

Der folgende Abschnitt zeigt eine Analyse der Auswirkungen der Anpassung der Gewichtung der Metriken aus Gleichung 5.1 auf die identifizierten Modellparameter bzw. die Simulationsergebnisse. Exemplarisch werden die in Tabelle 5.3 zusammengefassten Variationen geprüft. Eine detaillierte Optimierung der Metrik hinsichtlich der Identifikation des Pareto-Optimum (Ehrgott (1997), Deb (2001), Miettinen (2012)) liegt außerhalb der Zielsetzung der vorliegenden Arbeit. Zum vereinfachten Vergleich werden alle Ergebnisse gebündelt in Abbildung³ 5.8 bzw. Tabelle 5.4 dargestellt. Alle Ergebnisse sind zusätzlich detailliert in Anhang B zu finden.

Wie in dem in Abbildung 5.8 (c) dargestellten Vergleich der Vertikalbeschleunigungen zu erkennen ist, kann durch eine doppelte Gewichtung der Vertikalmetriken auf dem hinteren Teil des Teststückes eine etwas deutlichere Ausprägung der Amplituden erreicht werden. Auf dem vorderen Teil ist keine deutliche Verbesserung erkennbar. In Summe kann, wie in Tabelle 5.4 dargestellt, eine circa 10 % Verbesserung der Ver-

#	$\alpha_{y_{lms}}$	$\alpha_{z_{lms}}$	$\alpha_{y_{psd}}$	$\alpha_{z_{psd}}$	Auswirkung auf Gesamtmetriken
I	1	2	1	2	Erhöhte Gewichtung der Vertikalrichtung
II	1	1	0	0	Gesamtmetrikenreduktion auf Zeitbereich
III	0	0	1	1	Gesamtmetrikenreduktion auf Frequenzbereich

Tabelle 5.3: Exemplarisch untersuchte Metrikanpassungen

³Zur vereinfachten Darstellung werden als Kurzform $\alpha_z = \alpha_{z_{lms}} \& \alpha_{z_{psd}}$, $\alpha_y = \alpha_{y_{lms}} \& \alpha_{y_{psd}}$, $\alpha_{lms} = \alpha_{y_{lms}} \& \alpha_{z_{lms}}$ und $\alpha_{psd} = \alpha_{y_{psd}} \& \alpha_{z_{psd}}$ eingeführt.

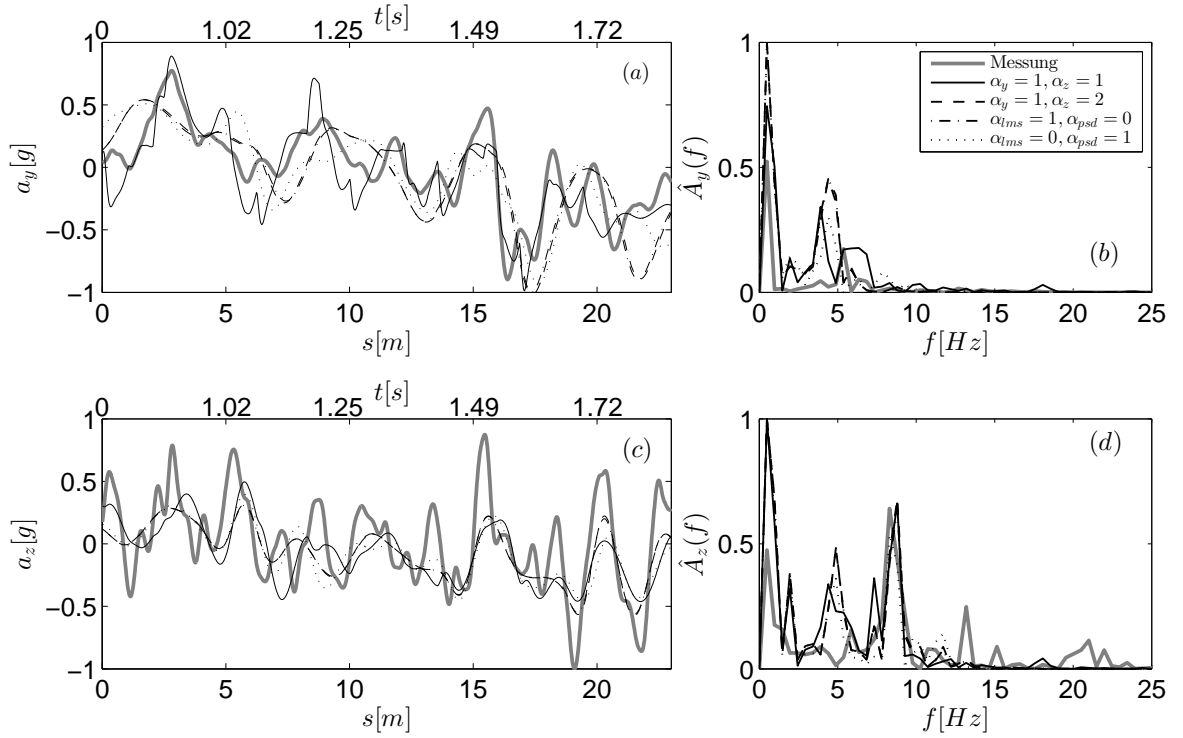


Abbildung 5.8: Verifikation und Validierung der neuen Simulationsergebnisse: laterale (a) - vertikale (c) Beschleunigungen und laterale (b) - vertikale Spektraldichten (d). Abweichungen modelliert mit Dierckx-Splines ($S = 0.0002$). Metrikvariationen nach Tabelle 5.3

tikalbeschleunigungen im Vergleich zur Referenzoptimierung aus Abschnitt 5.2.1 erzielt werden, welche jedoch mit einer Verschlechterung der Lateralbeschleunigung in ähnlicher Größenordnung einhergeht. Die Simulationsergebnisse mit auf den Zeitbereich beschränkter Metrik liefern eine nahezu identische Übereinstimmung. Es zeigt sich, dass die Berücksichtigung der Spektraldichte in der Metrik einen geringeren Einfluss auf die identifizierten Parameter und somit auf die Simulationsergebnisse als die Berücksichtigung der Beschleunigungen hat. Somit lässt sich vermuten, dass durch eine gute Übereinstimmung der gemessenen Beschleunigungen und der Simulationsergebnisse im Zeitbereich automatisch eine gute Übereinstimmung der Spektraldichten folgt. Im Umkehrschluss hierzu zeigen die Simulationsergebnisse mit auf den Frequenzbereich reduzierter Metrik, dass aus einer guten Übereinstimmung des Frequenzbereichs nicht zwangsläufig eine gute Übereinstimmung der Beschleunigungen im Zeitbereich folgt. So ist in Abbildung (a) und (c) eine leichte Phasenverschiebung zwischen Messung und Simulation erkennbar.

	Modellparameter									Metrik			
#	k_{LR}	e_{LR}	n_{LR}	k_{SR}	e_{SR}	n_{SR}	k_{GR}	e_{GR}	n_{GR}	$F_{y_{lms}}$	$F_{z_{lsm}}$	$F_{y_{psd}}$	$F_{z_{psd}}$
SW	3.5	0.75	1.125	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	253.99	70.14	0.0165	$1.12^* 10^{-4}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
Abs.	3.5	0.75	1.15	18.5	0.95	1.65	20.0	0.6	1.55	104.79	44.59	$9.32^* 10^{-4}$	$6.24^* 10^{-5}$
5.2.1	$\alpha_{y_{lms}} = 1, \alpha_{z_{lms}} = 1, \alpha_{y_{psd}} = 1, \alpha_{z_{psd}} = 1$									58.7%	36.4%	98.1%	44.3%
I	3.5	0.75	1.15	14.5	0.95	1.65	5.0	0.95	1.2	128.55	37.59	0.002	$7.08^* 10^{-5}$
	$\alpha_{y_{lms}} = 1, \alpha_{z_{lms}} = 2, \alpha_{y_{psd}} = 1, \alpha_{z_{psd}} = 2$									49.4%	46.5%	87.9%	36.8%
II	3.5	0.75	1.15	14.5	0.95	1.65	5.0	0.55	1.25	122.37	38.05	0.002	$7.21^* 10^{-5}$
	$\alpha_{y_{lms}} = 1, \alpha_{z_{lms}} = 1, \alpha_{y_{psd}} = 0, \alpha_{z_{psd}} = 0$									51.2%	45.3%	87.9%	35.6%
III	3.5	0.85	1.2	18.5	0.95	1.65	2.0	0.55	1.5	136.45	55.6	0.0011	$7.01^* 10^{-5}$
	$\alpha_{y_{lms}} = 0, \alpha_{z_{lms}} = 0, \alpha_{y_{psd}} = 1, \alpha_{z_{psd}} = 1$									46.3%	20.3%	93.3%	37.5%

Tabelle 5.4: Entwicklung der Modellparameter und die daraus folgende Änderung der Teilmetriken durch Anwendung der neuen Identifikationsmethode mit unterschiedlich gewichteter Gesamtmetriken

5.4 Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

Kapitel 5 zeigt, dass mit Hilfe des vorgestellten semi-automatischen Identifikationskonzeptes die Parameter des genutzten Kontaktkraftmodells so angepasst werden können, dass eine deutlich bessere Übereinstimmung zwischen Simulations- und Messergebnissen erzielt werden kann. Bei einer einfach gewichteten Metrik resultieren aus den identifizierten Parametern Simulationsergebnisse mit bis zum 58.7 % verbesserter Übereinstimmung im Zeit- und bis zu 98.1 % verbesserter Übereinstimmung im Frequenzbereich. Das Kapitel zeigt darüber hinaus, dass durch Variation der Metrik verschiedene Schwerpunkte in der Übereinstimmung gesetzt werden können. So resultiert beispielsweise eine doppelte Gewichtung der Vertikalrichtung in einer um circa 10 % verbesserten Übereinstimmung der Vertikalbeschleunigungen. Untersuchungen mit auf den Frequenz- oder Zeitbereich beschränkten Metriken machen deutlich, dass die Spektraldichte im Vergleich zu den Beschleunigungen einen weitaus geringeren Einfluss in der Gesamtmetriken hat. So können ohne Berücksichtigung der Spektraldichte Modellparameter identifiziert werden, die für lediglich um 8.9 % verringerte Übereinstimmung der Simulationsergebnisse sorgen. Zusätzlich führt eine Reduzierung der Gesamtmetriken auf die Spektraldichte zu einer leichten Phasenverschiebung in den Zeitverläufen. Abschie-

ßend kann aus den Untersuchungen entnommen werden, dass die in der vorliegenden Arbeit untersuchten Anpassungen der Gesamtmetrik zeigen, dass eine Berücksichtigung der lateralen und vertikalen Beschleunigungen sowie den daraus resultierenden Spektraldichten ohne spezielle Gewichtung zu ausgewogenen Simulationsergebnissen mit guter Übereinstimmung im Zeit- und Frequenzbereich führen können. Der Verfasser der vorliegenden Dissertationsschrift weist darauf hin, dass zur Validierung des vorgestellten Identifikationskonzeptes auch für allgemeine Bahngeometrien bzw. Fahrzeuge weitere Untersuchungen notwendig sind und in zukünftigen Arbeiten verfolgt werden könnten (vgl. Kapitel 6).

6 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit zeigt die Entwicklung und Implementierung von Methoden zur Modellierung von Schwingungsvorgängen von Achterbahnfahrzeugen über real vermessenen Schienengeometrien in die objektorientierte Simulationsumgebung M²BILE. Hierbei wird durch Berücksichtigung von rotierenden Rädern mit Roll- und Gleitreibung sowie realen Massen- und Trägheitseigenschaften und der Anwendung eines hysteresebehafteten Kontaktkraftmodells die Voraussetzung für realitätsnahe Simulationsergebnisse geschaffen. Durch die Nutzung eines ereignisgesteuerten Integrationsverfahrens kann auch über die in der vorliegenden Arbeit vorkommenden verhältnismäßig langen Simulationszeiten eine im Rahmen der Integrator toleranzen energiekonsistente Lösung der Modellgleichungen gewährleistet werden.

Zur Anregung des Fahrzeuges über den Rad-Schiene-Kontakt werden drei unterschiedliche Methoden zur Modellierung von Schienenabweichungen untersucht. Hierbei zeigt sich, dass durch Interpolation der Schienenabweichungen mit Shape-Preserving- bzw. Dierckx-Splines Anregungen mit unverhältnismäßig hohen Frequenzen erzeugt werden können. Durch die Approximation der Schienenabweichungen mit Dierckx-Splines kann, bei geeigneter Wahl des Glättungsfaktors, die Anregung des Fahrzeugmodells über die Rad-Schiene-Kontakte realistische Werte annehmen. Hierbei zeigt sich, dass die Wahl des Glättungsfaktors essentiell wichtig für die Qualität der Simulationsergebnisse ist. So folgt aus einem zu klein gewählten Glättungsfaktor, ähnlich der Interpolation, eine höherfrequente Anregungen, während ein zu groß gewählter Glättungsfaktor die Anregung des Fahrzeugs unverhältnismäßig verringert. Die Wahl eines geeigneten Glättungsfaktors kann mit Hilfe des eingeführten Konzeptes zur Analyse der Schienenabweichungen „von Hand“ durchgeführt werden. Die aus der Approximation der Schienenabweichungen resultierende gute Übereinstimmung von Simulationsergebnissen und Messungen zeigt im Vergleich zu den interpolierenden Methoden zusätzlich eine um den Faktor von circa 14.5 bzw. 6.5 verkürzte Simulationszeit.

Neben der Modellierung der Schienenabweichungen ist die Wahl der Parameter des Rad-Schiene-Kontaktkraftmodells grundlegend für die korrekte Anregung des Fahrzeugmodells. Aufgrund von Simulationszeiten von circa 80 Sekunden und daraus resultierender verhältnismäßig zeitintensiver Auswertung einer Kostenfunktion ist eine globale Parameteridentifikation mit Hilfe eines Optimierungsansatzes im vorliegenden Fall nicht praktikabel. Aus diesem Grund werden die Parameter mit Hilfe eines in der vorliegenden Arbeit entwickelten semi-automatischen Identifikationskonzeptes bestimmt. Hierzu werden die Modellparameter variiert und die daraus resultierenden Simulationsergebnisse mit verschiedenen Metriken sowie einer neu eingeführten visuellen

Auswertung mit Hilfe von Heatmaps analysiert. Es zeigt sich, dass die Simulationsergebnisse durch die neu identifizierten Modellparameter im Zeitbereich um bis zu 58.7 % und im Frequenzbereich um bis zu 98.1 % verbessert werden können. Eine Untersuchung mit verschiedenen angepassten Gewichtungen der Teilmetriken verdeutlicht, dass hierdurch gewünschten Schwerpunkte in den Ergebnisse gesetzt werden können. Grundsätzlich liefert jedoch eine gleiche Gewichtung aller Teilmetriken ein ausgeglichenes Gesamtergebnis.

Eine mögliche Fortführung der gezeigten Methoden und Ansätze könnte die Entwicklung eines allgemeingültigen Verfahrens zur Bestimmung eines optimalen Glättungsfaktors sein. Ebenfalls wäre die Entwicklung eines allgemeingültigen Identifikationsverfahrens eine sinnvolle Erweiterung. Hierbei könnte eine automatisierte Auswertung der Simulationsläufe und eine daraus folgende vollautomatische Identifikation der Modellparameter von Vorteil sein. Ebenfalls wäre eine Erweiterung der gezeigten Metrik um die Ergebnisse einer Rainflow-Analyse eine geeignete Verfeinerung. Unabhängig von den genutzten Teilmetriken wäre die Wahl der bestmöglichen Gewichtungsfaktoren α_i und damit die Identifikation des Pareto-Optimums und somit der optimalen Modellparameter eine konsequente Weiterentwicklung. Darüber hinaus stellt die Teillinearisation der Relativbewegungen zwischen Fahrzeug und Schiene eine Möglichkeit dar, um die Simulationszeit zu verkürzen und damit den Komfort und die Nutzbarkeit der Simulationsumgebung im praktikablen Gebrauch weiter zu erhöhen.

Literaturverzeichnis

- [Arnold 1994] ARNOLD, M: The geometry of wheel-rail contact. In: *Proceedings of the First Workshop on „Dynamics of Wheel-Rail Systems“*, University of Rostock, Department of Mathematics, Citeseer, 1994
- [Arnold u. Netter 1998] ARNOLD, M ; NETTER, H: Approximation of contact geometry in the dynamical simulation of wheel-rail. In: *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 4 (1998), Nr. 2, S. 162–184
- [Bär 2010] BÄR, Christian: *Elementare Differentialgeometrie*. Walter de Gruyter, 2010
- [Baumgarte 1972] BAUMGARTE, Joachim: Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1 (1972), Nr. 1, S. 1–16
- [Boos u. McPhee 2010] BOOS, J ; MCPHEE, John: Volumetric contact models and experimental validation. In: *Proceedings of the 1st Joint International Conference on Multibody System Dynamics, Lappeenranta, Finland*, 2010
- [Brigham 1995] BRIGHAM, Elbert O.: *FFT. Schnelle Fourier-Transformation*. 6. Aufl. R. Oldenbourg Verlag München Wien, 1995
- [Brigham 1997] BRIGHAM, Elbert O.: *FFT-Anwendungen*. R. Oldenbourg Verlag München Wien, 1997
- [do Carmo 1993] CARMO, Manfredo P.: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Vieweg, 1993
- [Caspers 2014] CASPERS, L.: *Schienemodellierung für Achterbahnen mit Shape-Preserving-Splines*. Duisburg, Master Thesis, 2014
- [Coulomb 1785] COULOMB, C.A.: *Theorie des machines simples, en ayant egard au frottement de leurs parties, et a la roideur des cordages*. Memoire de Mathematique et de Physics de l'academie Royal, 1785
- [Darboux 1889] DARBOUX, Gaston: *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*. Bd. 2. Gauthier-Villars, 1889
- [De Boor 1978] DE BOOR, C.: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 27: *A Practical Guide to Splines*. New York : Springer, 1978

-
- [Deb 2001] DEB, K.: *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. Wiley, 2001 (Wiley Interscience Series in Systems and Optimization)
- [Deutsches Institut für Normung e.V. 2004] DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V.: Fliegende Bauten und Anlagen für Veranstaltungsplätze und Vergnügungsparks DIN-EN 13814. 2004
- [Dierckx 1995] DIERCKX, P.: *Curve and Surface Fitting with Splines*. Clarendon Press, 1995
- [Diolaiti u. a. 2005] DIOLAITI, Nicola ; MELCHIORRI, Claudio ; STRAMIGIOLI, Stefano: Contact impedance estimation for robotic systems. In: *Robotics, IEEE Transactions on* 21 (2005), Nr. 5, S. 925–935
- [Dubowsky u. Freudenstein 1971] DUBOWSKY, S ; FREUDENSTEIN, F: Dynamic Analysis of Mechanical Systems With Clearances-Part 1: Formation of Dynamic Model - Part 2: Dynamic Response. In: *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 93 (1971), Nr. 1, S. 305–309/310–316
- [Duda u. a. 2001] DUDA, Richard O. ; HART, Peter E. ; STORK, David G.: Pattern classification. 2nd Edition. In: *New York* (2001)
- [Ehrgott 1997] EHRGOTT, M.: *Multiple Criteria Optimization - Classification and Methodology*. Shaker Verlag Aachen, 1997
- [Eickhorn 2012] EICKHORN, M.: *Implementierung und Modellbildung von verschiedenen Reibkraftmodellen für den Kontakt zwischen zwei Zylindern*. Duisburg, Bachelor Thesis, 2012
- [Ferreira u. a. 2013] FERREIRA, Philippe ; FLORES, FG ; FLORES, Paulo ; SIEBLER, M ; KECSKEMÉTHY, A: Modeling and analysis of an ankle-foot orthosis (AFO) using multibody methodologies, Sociedade Portuguesa de Biomecânica, 2013
- [Fletcher 2013] FLETCHER, R.: *Practical Methods of Optimization*. Wiley, 2013. – ISBN 9781118723180
- [Flores u. Ambrósio 2010] FLORES, Paulo ; AMBRÓSIO, Jorge: On the contact detection for contact-impact analysis in multibody systems. In: *Multibody System Dynamics* 24 (2010), Nr. 1, S. 103–122
- [Flores u. a. 2006a] FLORES, Paulo ; AMBRÓSIO, Jorge ; CLARO, José Carlos P. ; LANKARANI, HM: Influence of the contact impact force model on the dynamic

- response of multibody systems. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics* 220 (2006), Nr. 1, S. 21–34
- [Flores u. a. 2006b] FLORES, Paulo ; AMBRÓSIO, Jorge ; CLARO, José Carlos P. ; LANKARANI, HM ; KOSHY, CS: A study on dynamics of mechanical systems including joints with clearance and lubrication. In: *Mechanism and Machine Theory* 41 (2006), Nr. 3, S. 247–261
- [Flores u. a. 2011] FLORES, Paulo ; MACHADO, Margarida ; SILVA, Miguel T. ; MARTINS, Jorge M.: On the continuous contact force models for soft materials in multibody dynamics. In: *Multibody System Dynamics* 25 (2011), Nr. 3, S. 357–375
- [Frenet 1852] FRENET, F: Sur les courbes à double courbure. In: *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1852), S. 437–447
- [Geu Flores 2013] GEU FLORES, F.: An Object-Oriented Framwork for Spatial Motion Planning of Multibody Systems. Düsseldorf : VDI-Verlag, 2013 (Fortschrittberichte VDI, Reihe 20 Nr. 449)
- [Gilardi u. Sharf 2002] GILARDI, G ; SHARF, I: Literature survey of contact dynamics modelling. In: *Mechanism and Machine Theory* 37 (2002), Nr. 10, S. 1213–1239
- [Goldsmith 1964] GOLDSMITH, Werner: *Impact, the theory and physical behavior of colliding solids*. Mineola - New York : Dover Publications, 1964
- [Gonthier u. McPhee 2004] GONTHIER, Yves ; MCPHEE, John: A regularized contact model with asymmetric damping and dwell-time dependent friction. In: *Multibody System Dynamics* 11 (2004), Nr. 3, S. 209–233
- [Goodman 2001] GOODMAN, T: Shape preserving interpolation by curves. In: *Algorithms for Approximation* 4 (2001), Nr. 3, S. 24–35
- [Goodman u. Unsworth 1988] GOODMAN, Tim N. ; UNSWORTH, Keith: Shape preserving interpolation by curvature continuous parametric curves. In: *Computer Aided Geometric Design* 5 (1988), Nr. 4, S. 323–340
- [Grabner 2003] GRABNER, G.: *Efficient and Reliable Multibody Simulation of Regularized Impacts between Elementary Contact Pairs*. TU Graz, Ph.D. Dissertation, 2003
- [Grabner u. Kecskeméthy 2005] GRABNER, Gerald ; KECSKEMÉTHY, Andrés: An Integrated Runge–Kutta Root Finding Method for Reliable Collision Detection in Multibody Systems. In: *Multibody System Dynamics* 14 (2005), Nr. 3-4, S. 301–316

-
- [Guess u. a. 2010] GUESS, Trent M. ; THIAGARAJAN, Ganesh ; KIA, Mohammad ; MISHRA, Meenakshi: A subject specific multibody model of the knee with menisci. In: *Medical Engineering & Physics* 32 (2010), Nr. 5, S. 505–515
- [Hairer u. a. 2009] HAIRER, Ernst ; NORSETT, Syvert P. ; WANNER, Gerhard: Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. (2009)
- [Hartmann 2002] HARTMANN, Sven O.: *Simulation von Mehrkörpersystemen mit Kontakten komplexer Geometrie*. Gerhard–Mercator–Universität, Ph.D. Dissertation, 2002
- [Hertz 1881] HERTZ, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92 (1881), S. 156–171
- [Hindmarsh u. Petzold 2005] HINDMARSH, AC ; PETZOLD, LR: ODEPACK, Initial Value Problems of Ordinary Differential Equation System. In: <http://www.oecd-nea.org/tools/abstract/detail/uscd1232> (2005)
- [Hippmann 2004] HIPPMANN, Gerhard: *Modellierung von Kontakten komplex geformter Körper in der Mehrkörperdynamik*. TU Wien, Ph.D. Dissertation, 2004
- [Hunt u. Crossley 1975] HUNT, KH ; CROSSLEY, FRE: Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact. In: *Journal of Applied Mechanics* 42 (1975), Nr. 2, S. 440–445
- [Jenne u. a. 2012] JENNE, Sven ; PÖTTER, Kurt ; ZENNER, Harald: *Zählverfahren und Lastannahme in der Betriebsfestigkeit*. Springer, 2012
- [Johnson 1987] JOHNSON, K. L.: *Contact mechanics*. Cambridge University Press, 1987
- [Kaklis u. Karavelas 1997] KAKLIS, PD ; KARAVELAS, MI: Shape-preserving interpolation in R3. In: *IMA Journal of Numerical Analysis* 17 (1997), Nr. 3, S. 373–419
- [Kecskeméthy 1993] KECSKEMÉTHY, A.: *Objektorientierte Modellierung der Dynamik von Mehrkörpersystemen mit Hilfe von Übertragungselementen*, Universität Duisburg-Essen, Dissertation, 1993
- [Kecskemethy 1996] KECSKEMETHY, A: Sparse-matrix generation of Jacobians for the object-oriented modeling of multibody systems. In: *Nonlinear Dynamics* 9 (1996), Nr. 1-2, S. 185–204
- [Kecskeméthy 2002] KECSKEMÉTHY, A.: *MÜBBILE 1.3 User's Guide*. Lehrstuhl für Mechanik, Universität Duisburg-Essen, 2002

-
- [Kecskemethy u. Hiller 1993] KECSKEMETHY, A ; HILLER, M: Modellierung der Dynamik komplexer Mehrkörpersysteme mit Hilfe von kinematischen Übertragungselementen. In: *Archive of Applied Mechanics* 63 (1993), Nr. 6, S. 386–401
- [Kecskeméthy u. Hiller 1994] KECSKEMÉTHY, Andrés ; HILLER, Manfred: An object-oriented approach for an effective formulation of multibody dynamics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 115 (1994), Nr. 3, S. 287–314
- [Khulief u. Shabana 1986] KHULIEF, YA ; SHABANA, AA: Dynamic analysis of constrained system of rigid and flexible bodies with intermittent motion. In: *Journal of Mechanical Design* 108 (1986), Nr. 1, S. 38–45
- [Khulief u. Shabana 1987] KHULIEF, YA ; SHABANA, AA: A continuous force model for the impact analysis of flexible multibody systems. In: *Mechanism and Machine Theory* 22 (1987), Nr. 3, S. 213–224
- [Kik u. a. 1989] KIK, W ; MÖLLER, G ; RULKA, W: SIMPACK: Ein Programm zur Simulation von Mehrkörpersystemen. In: *VDI Berichte* (1989), Nr. 786 S 197
- [Kim u. Vanderploeg 1986] KIM, SS ; VANDERPLOEG, MJ: A general and efficient method for dynamic analysis of mechanical systems using velocity transformations. In: *Journal of Mechanical Design* 108 (1986), Nr. 2, S. 176–182
- [de Lagrange 1788] LAGRANGE, J.L. de: *Mécanique analytique*. Bd. 1. Mallet-Bachelier, 1788
- [de Lagrange u. Murhard 1797] LAGRANGE, J.L. de ; MURHARD, F.W.A.: *Analytische Mechanik*. Vandenhoeck und Ruprecht, 1797
- [Lankarani u. Nikravesh 1994] LANKARANI, Hamid M. ; NIKRAVESH, Parviz E.: Continuous contact force models for impact analysis in multibody systems. In: *Nonlinear Dynamics* 5 (1994), Nr. 2, S. 193–207
- [Lankarani u. Nikravesh 1990] LANKARANI, HM ; NIKRAVESH, PE: A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems. In: *Journal of Mechanical Design* 112 (1990), Nr. 3, S. 369–376
- [Lee u. Wang 1983] LEE, Ting W. ; WANG, AC: On the dynamics of intermittent-motion mechanisms. Part 1: Dynamic model and response. In: *Journal of Mechanical Design* 105 (1983), Nr. 3, S. 534–540

-
- [Lunze 2002] LUNZE, Jan: *Regelungstechnik 1 - Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Springer, 2002
- [Machado u. a. 2012] MACHADO, Margarida ; MOREIRA, Pedro ; FLORES, Paulo ; LANKARANI, Hamid M.: Compliant contact force models in multibody dynamics: Evolution of the Hertz contact theory. In: *Mechanism and Machine Theory* 53 (2012), S. 99–121
- [Malessa u. Kecskeméthy 2012a] MALESSA, C. ; KECSKEMÉTHY, A.: A Comparison of Rolling Contact on Roller-Coaster Rails Between Penalty-Methods and Exact Event-Controlled Impact Detection. In: *Proceedings of the 2nd Joint International Conference on Multibody System Dynamics (IMSD)*. Stuttgart, Germany, Mai 29–01 2012
- [Malessa u. Kecskeméthy 2012b] MALESSA, C. ; KECSKEMÉTHY, A.: A Comparison of Rolling Contact on Roller-Coaster Rails Between Penalty-Methods and Exact Event-Controlled Impact Detection. In: *Proceedings of the 83rd Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM)*. Darmstadt, Germany, 26–30 2012. – Oral presentation
- [Malessa u. Kecskeméthy 2012c] MALESSA, C. ; KECSKEMÉTHY, A.: A Comparison of Rolling Contact on Roller-Coaster Rails Between Penalty-Methods and Exact Event-Controlled Impact Detection. In: *Proceedings of the 2nd Joint International Conference on Multibody System Dynamics (IMSD)*. Stuttgart, Germany, Mai 29–01 2012. – Oral presentation
- [Malessa u. Kecskeméthy 2013] MALESSA, C. ; KECSKEMÉTHY, A.: An Object Oriented Environment for Simulation of Wheel–Rail Contact in Roller Coaster. In: *Proceedings of the ECCOMAS Thematic Conference*. Zagreb, Kroatien, 01–04 2013. – Oral presentation
- [Malessa 2007] MALESSA, Christian: *A Recursive Algorithm for Open and Closed-Loop Multibody Systems*. University of Arizona, Master-Thesis, 2007
- [Malessa 2010] MALESSA, Christian: *Modellbildung und Parameteridentifikation zur Optimierung von MKS Kontaktmodellen*. Universität Duisburg-Essen, Diplomarbeit, 2010
- [Miettinen 2012] MIETTINEN, K.: *Nonlinear Multiobjective Optimization*. Springer US, 2012 (International Series in Operations Research & Management Science). – ISBN 9781461555636

-
- [Millard u. Kecskeméthy 2015] MILLARD, Matthew ; KECSKEMÉTHY, Andrés: A 3D foot-ground model using disk contacts. In: *Interdisciplinary Applications of Kinematics*. Springer, 2015, S. 161–169
- [Moré u. a. 1980] MORÉ, Jorge J. ; GARBOW, Burton S. ; HILLSTROM, Kenneth E.: User Guide for MINPACK-1 / Argonne National Laboratory. Argonne, IL, USA, August 1980 (ANL-80-74). – Forschungsbericht
- [Mortenson 2006] MORTENSON, Michael E.: *Geometric Modeling*. New York : Industrial Press Inc., 2006
- [Negrut u. Harris 2001] NEGRUT, D ; HARRIS, B: ADAMS Theory in a Nutshell for class ME543. In: *Dept. of Mech. Eng., Univ. of Michigan, Ann Arbor* (2001)
- [Newton u. Halley 1714] NEWTON, Isaac ; HALLEY, Edmund: *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Bd. 62. Jussu Societatis Regiae ac typis Josephi Streater, prostant venales apud Sam. Smith, 1714
- [Nikravesh 1988] NIKRAVESH, P. E.: *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*. New Jersey : Prentice Hall, 1988
- [Nikravesh 1990] NIKRAVESH, Parviz E.: Systematic reduction of multibody equations of motion to a minimal set. In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 25 (1990), Nr. 2, S. 143–151
- [Orlandea u. a. 1979] ORLANDEA, N. ; CHACE, M.A. ; CALAHAN, D.A.: A sparsity-oriented approach to the dynamic analysis and design of mechanical design of mechanical systems — Parts 1 & 2. (1979), August, S. 773–784
- [Papula 2004] PAPULA, L.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler - Anwendungsbeispiele: Aufgabenstellungen aus Naturwissenschaft und Technik mit ausführlichen Lösungen*. Vieweg+Teubner Verlag, 2004 (Viewegs Fachbücher der Technik). <https://books.google.de/books?id=2TiruFNYcoC>. – ISBN 9783528443559
- [Pereira u. a. 2011] PEREIRA, Cândida M ; RAMALHO, Amílcar L ; AMBRÓSIO, Jorge A.: A critical overview of internal and external cylinder contact force models. In: *Nonlinear Dynamics* 63 (2011), Nr. 4, S. 681–697
- [Petzold u. Hindmarsh 2005] PETZOLD, LR ; HINDMARSH, AC: LSODAR, Ordinary Differential Equation Solver for Stiff or Non-Stiff System with root-finding. In: <http://www.oecd-neo.org/tools/abstract/detail/uscd1228> (2005)

-
- [Pfeiffer u. Glocker 2000] PFEIFFER, Friedrich ; GLOCKER, Christoph: *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. Bd. 421. Springer, 2000
- [Poisson u. Stern 1836] POISSON, Siméon D. ; STERN, Moriz A.: *Lehrbuch der Mechanik. Nach der zweiten sehr vermehrten Ausgabe*. Bd. 2. Berlin : Reimer, 1836
- [Pombo u. Ambrósio 2005] POMBO, João ; AMBRÓSIO, Jorge: A computational efficient general wheel-rail contact detection method. In: *Journal of mechanical science and technology* 19 (2005), Nr. 1, S. 411–421
- [Pombo u. Ambrósio 2007] POMBO, Joao ; AMBRÓSIO, Jorge: Modelling tracks for roller coaster dynamics. In: *International journal of vehicle design* 45 (2007), Nr. 4, S. 470–500
- [Pombo u. Ambrósio 2012] POMBO, João ; AMBRÓSIO, Jorge: An alternative method to include track irregularities in railway vehicle dynamic analyses. In: *Nonlinear Dynamics* 68 (2012), Nr. 1-2, S. 161–176
- [Pombo u. a. 2007] POMBO, João ; AMBRÓSIO, Jorge ; SILVA, Miguel: A new wheel–rail contact model for railway dynamics. In: *Vehicle System Dynamics* 45 (2007), Nr. 2, S. 165–189
- [Pombo u. Ambrósio 2003] POMBO, João ; AMBRÓSIO, Jorge A.: General spatial curve joint for rail guided vehicles: kinematics and dynamics. In: *Multibody system dynamics* 9 (2003), Nr. 3, S. 237–264
- [Popov 2009] POPOV, Valentin L.: *Kontaktmechanik und Reibung - Ein Anwendungsbuch von der Nanotribologie bis zur numerischen Simulation*. Berlin Heidelberg : Springer, 2009
- [Popovici u. Mosterman 2012] POPOVICI, K. ; MOSTERMAN, P.J.: *Real-Time Simulation Technologies: Principles, Methodologies, and Applications*. Taylor & Francis, 2012 (Computational Analysis, Synthesis, and Design of Dynamic Systems)
- [Radhakrishnan u. Hindmarsh 1993] RADHAKRISHNAN, K. ; HINDMARSH, A.C.: Description and Use of LSODE, the Livermore Solver for Ordinary Differential Equations / Lawrence Livermore National Laboratory. 1993. – Forschungsbericht
- [Renka 1987] RENKA, RJ: Interpolatory tension splines with automatic selection of tension factors. In: *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 8 (1987), Nr. 3, S. 393–415

-
- [Schiehlen 1997] SCHIEHLEN, Werner: Multibody system dynamics: roots and perspectives. In: *Multibody system dynamics* 1 (1997), Nr. 2, S. 149–188
- [Schramm u. a. 2010] SCHRAMM, Dieter ; HILLER, Manfred ; BARDINI, Roberto: *Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen*. Springer, 2010
- [Schramm u. a. 2014] SCHRAMM, Dieter ; HILLER, Manfred ; BARDINI, Roberto: *Vehicle Dynamics - Modeling and Simulation*. Springer, 2014
- [Serret 1868] SERRET, Joseph A.: *Cours de calcul différentiel et intégral par J.-A. Serret: Calcul différentiel. 1*. Gauthier-Villars, 1868
- [Shabana u. Sany 2001] SHABANA, Ahmed A. ; SANY, Jalil R.: A survey of rail vehicle track simulations and flexible multibody dynamics. In: *Nonlinear Dynamics* 26 (2001), Nr. 2, S. 179–212
- [Shabana u. a. 2004] SHABANA, Ahmed A. ; ZAAZAA, Khaled E. ; ESCALONA, José L ; SANY, Jalil R.: Development of elastic force model for wheel/rail contact problems. In: *Journal of Sound and Vibration* 269 (2004), Nr. 1, S. 295–325
- [Shampine u. Gear 1979] SHAMPINE, Lawrence F. ; GEAR, Charles W.: A user's view of solving stiff ordinary differential equations. In: *SIAM review* 21 (1979), Nr. 1, S. 1–17
- [SimpackAG 1990] SIMPACKAG: *Simpack Reference Guide - Simpack Release 8.9*. Springer, 1990, S. 161–179. – Software available from: <http://www.simpack.de>
- [Smith u. Haug 1990] SMITH, RC ; HAUG, EJ: DADS – Dynamic analysis and design system. In: *Multibody Systems Handbook*. Springer, 1990, S. 161–179
- [Sugiyama u. Shabana 2007] SUGIYAMA, Hiroyuki ; SHABANA, Ahmed A.: Trajectory coordinate constraints in multibody railroad vehicle systems. In: *Journal of System Design and Dynamics* 1 (2007), Nr. 3, S. 481–490
- [Sukalkar 2009] SUKALKAR, D.: *Implementation of driving dynamics system as Active Front Steering (AFS) and Active Dynamic Control (ADC) into veDYNA vehicle model and analysis of potentials based on assesement criteria*. Universität Duisburg-Essen, Master Thesis, 2009
- [Tändl 2009] TÄNDL, M.: *Dynamic Simulation and Design of Roller Coaster Motion*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 2009 (Fortschrittberichte VDI, Reihe 20 Nr. 423)

- [Woernle 2011] WOERNLE, Christoph: *Mehrkörpersysteme: eine Einführung in die Kinematik und Dynamik von Systemen starrer Körper*. Springer-Verlag, 2011
- [www.coastersandmore.de] WWW.COASTERSANDMORE.DE: *Coasters and More* (Zugriff: 03.11.2014). <http://www.coastersandmore.de/rides/hollywoodripriderocket/hollywoodripriderocket.shtml>
- [Zhang u. Sharf 2004] ZHANG, Yuning ; SHARF, Inna: Compliant Force Modelling for Impact Analysis. In: *Proceedings of ASME 2004 Design Engineering Technical Conference and Computers and Information in Engineering Conference* (2004)
- [Zhang u. Sharf 2009] ZHANG, Yuning ; SHARF, Inna: Validation of nonlinear viscoelastic contact force models for low speed impact. In: *Journal of Applied Mechanics* 76 (2009), Nr. 5, S. 051002

A Detaillierte Identifikationsergebnisse mit interpolierten Schienenabweichungen

A.1 Parameteridentifikation: Abweichungen interpoliert mit Shape-Preserving-Splines

	Modellparameter									Metrik			
#	k_{LR}	e_{LR}	n_{LR}	k_{SR}	e_{SR}	n_{SR}	k_{GR}	e_{GR}	n_{GR}	$F_{y_{lms}}$	$F_{z_{lsm}}$	$F_{y_{psd}}$	$F_{z_{psd}}$
SW	3.5	0.75	1.125	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	444.66	88.97	0.046	0.001
HM1	3.5	0.85	1.0	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	114.8	52.93	0.0014	$1.24 \cdot 10^{-4}$
P1	5.0	0.85	1.0	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	328.0	74.84	0.021	$1.22 \cdot 10^{-4}$
HM2	5.0	0.85	1.0	14.0	0.85	1.5	3.5	0.5	1.6	79.63	68.53	$8.21 \cdot 10^{-4}$	$1.45 \cdot 10^{-4}$
P2	5.0	0.85	1.0	13.0	0.85	1.5	3.5	0.5	1.6	89.03	67.15	$8.89 \cdot 10^{-4}$	$1.81 \cdot 10^{-4}$
HM3	5.0	0.85	1.0	13.0	0.85	1.5	3.5	0.6	1.1	63.04	55.98	$9.84 \cdot 10^{-4}$	$2.11 \cdot 10^{-4}$
P3	5.0	0.85	1.0	13.0	0.85	1.5	6.5	0.6	1.1	76.35	55.55	$9.66 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$
	Verringerung der Metrik von SW zu D3 um:									82.8%	37.6%	97.9%	85.0%

Tabelle A.1: Entwicklung der Modellparameter und die daraus folgende Änderung der Metriken. Abweichungen modelliert mit Shape-Preserving-Splines. Berechnung der Metrik mit $\alpha_{y_{lms}} = 1$, $\alpha_{z_{lms}} = 1$, $\alpha_{y_{psd}} = 1$, $\alpha_{z_{psd}} = 1$.

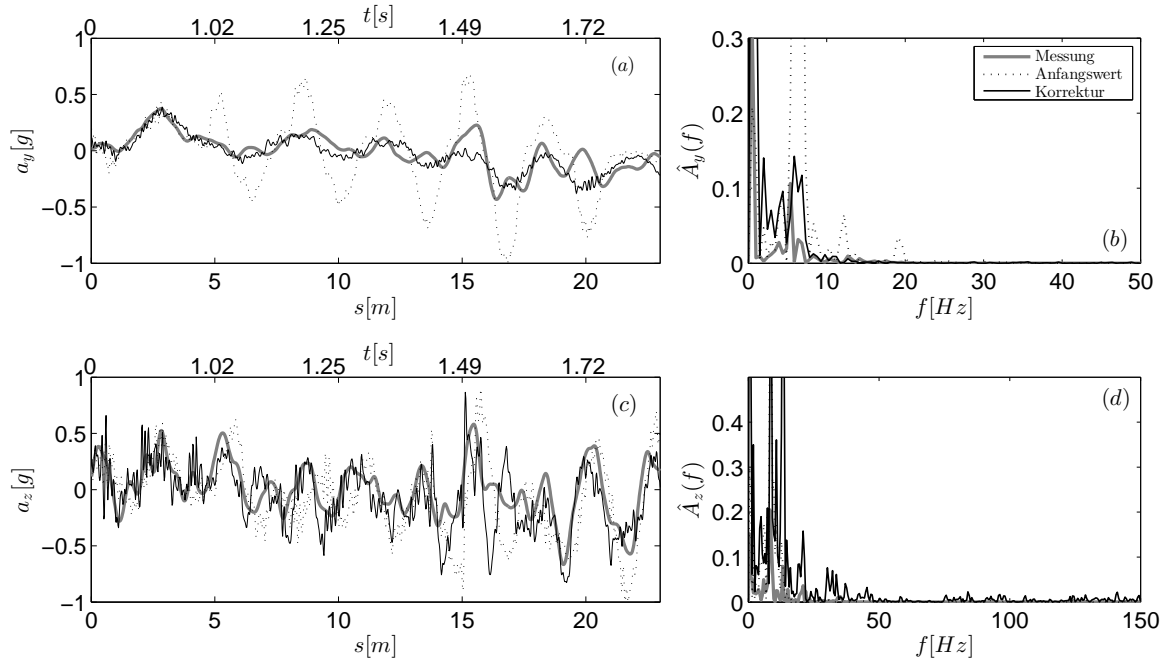


Abbildung A.1: Verifikation und Validierung der neuen Simulationsergebnisse: laterale (a) - vertikale (c) Beschleunigungen und laterale (b) - vertikale Spektraldichte (d). Abweichungen modelliert mit Shape-Preserving-Splines. Berechnung der Metrik mit $\alpha_{y_{lms}}=1$, $\alpha_{z_{lms}}=1$, $\alpha_{y_{psd}}=1$, $\alpha_{z_{psd}}=1$

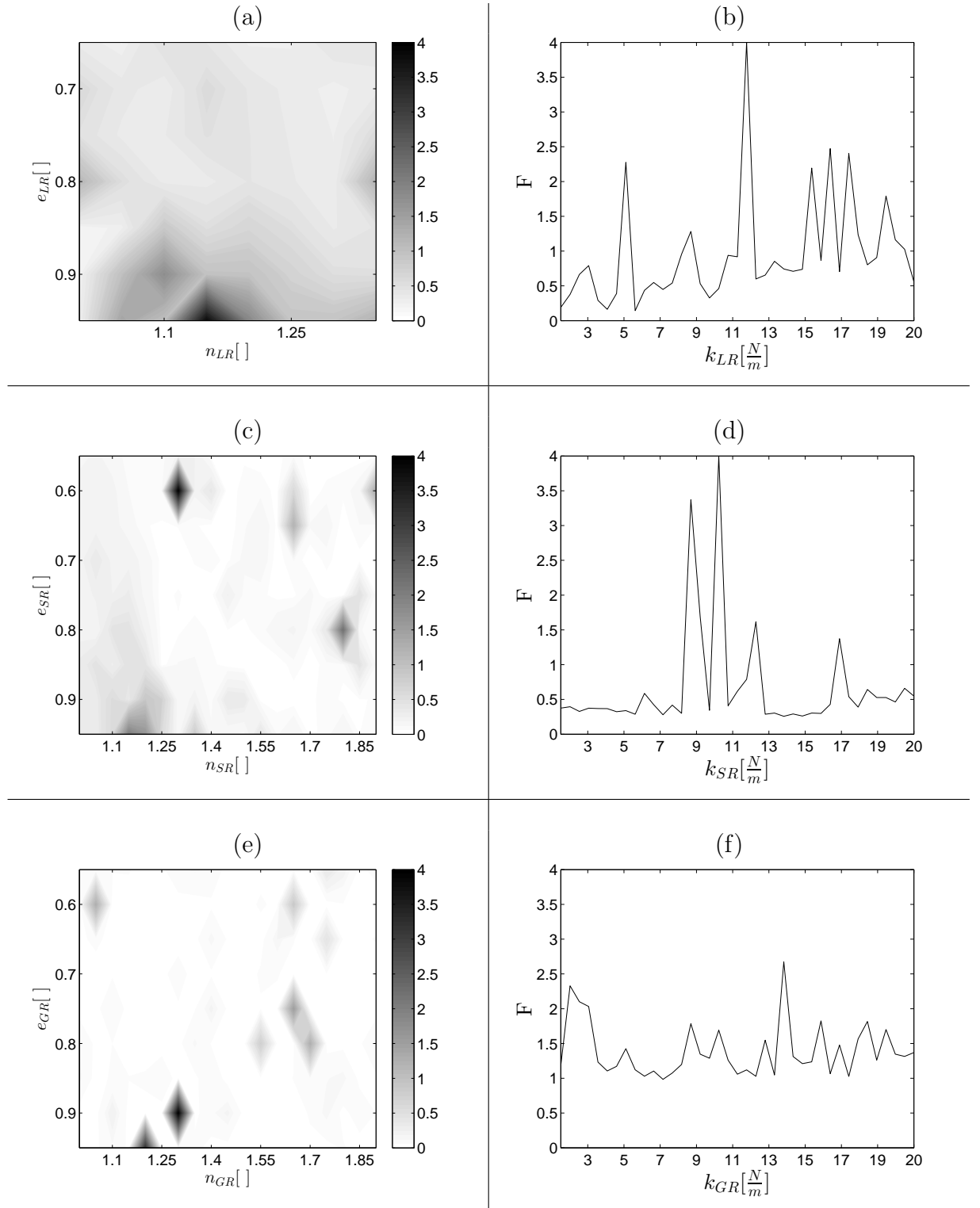


Abbildung A.2: Auswertung der signifikanten Bereiche der Metrik mit Heatmap 1 (a), Heatmap 2 (c), Heatmap 3 (e) - x-y Diagramm (b), x-y Diagramm (d), x-y Diagramm (f). Abweichungen modelliert mit Shape-Preserving-Splines. Berechnung der Metrik mit $\alpha_{y_{lms}}=1$, $\alpha_{z_{lms}}=1$, $\alpha_{y_{psd}}=1$, $\alpha_{z_{psd}}=1$

A.2 Parameteridentifikation: Abweichungen interpoliert mit Dierckx-Splines

	Modellparameter									Metrik			
#	k_{LR}	e_{LR}	n_{LR}	k_{SR}	e_{SR}	n_{SR}	k_{GR}	e_{GR}	n_{GR}	$F_{y_{lms}}$	$F_{z_{lsm}}$	$F_{y_{psd}}$	$F_{z_{psd}}$
SW	3.5	0.75	1.125	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	312.03	125.61	0.0216	$3.74 \cdot 10^{-4}$
HM1	3.5	0.65	1.25	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	81.16	91.96	0.0017	$1.99 \cdot 10^{-4}$
P1	4.0	0.65	1.25	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	120.93	83.63	0.0024	$2.05 \cdot 10^{-4}$
HM2	4.0	0.65	1.25	14.0	0.65	1.5	3.5	0.5	1.6	74.52	78.84	$9.48 \cdot 10^{-4}$	$1.35 \cdot 10^{-4}$
P2	4.0	0.65	1.25	17.5	0.65	1.5	3.5	0.5	1.6	85.31	86.52	$8.08 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$
HM3	4.0	0.65	1.25	17.5	0.65	1.5	3.5	0.75	1.4	74.14	80.05	$9.16 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$
P3	4.0	0.65	1.25	17.5	0.65	1.5	5.0	0.75	1.4	107.93	74.67	$7.55 \cdot 10^{-4}$	$1.34 \cdot 10^{-5}$
Verringerung der Metrik von SW zu D3 um:										65.5%	40.5%	96.7%	96.5%

Tabelle A.2: Entwicklung der Modellparameter und die daraus folgende Änderung der Metriken. Abweichungen modelliert mit Dierckx-Splines ($S=0$). Berechnung der Metrik mit $\alpha_{y_{lms}} = 1$, $\alpha_{z_{lms}} = 1$, $\alpha_{y_{psd}} = 1$, $\alpha_{z_{psd}} = 1$.

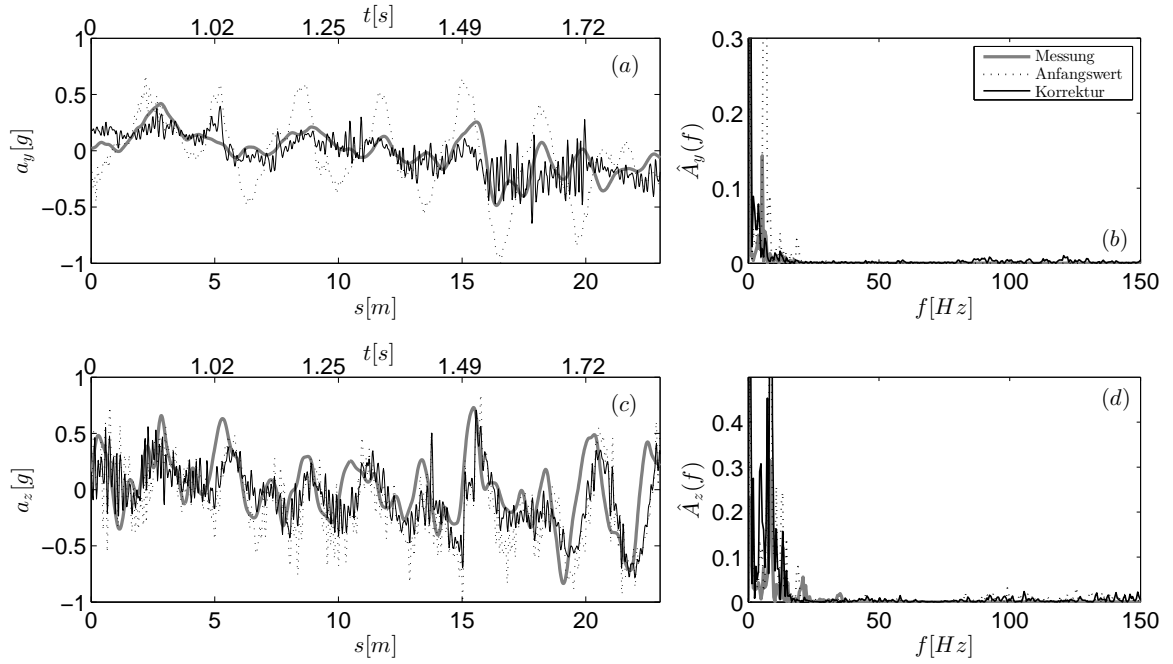


Abbildung A.3: Verifikation und Validierung der neuen Simulationsergebnisse: laterale (a) - vertikale (c) Beschleunigungen und laterale (b) - vertikale Spektraldichte (d). Abweichungen modelliert mit Dierckx-Splines ($S=0$). Berechnung der Metrik mit $\alpha_{y_{lms}}=1$, $\alpha_{z_{lms}}=1$, $\alpha_{y_{psd}}=1$, $\alpha_{z_{psd}}=1$

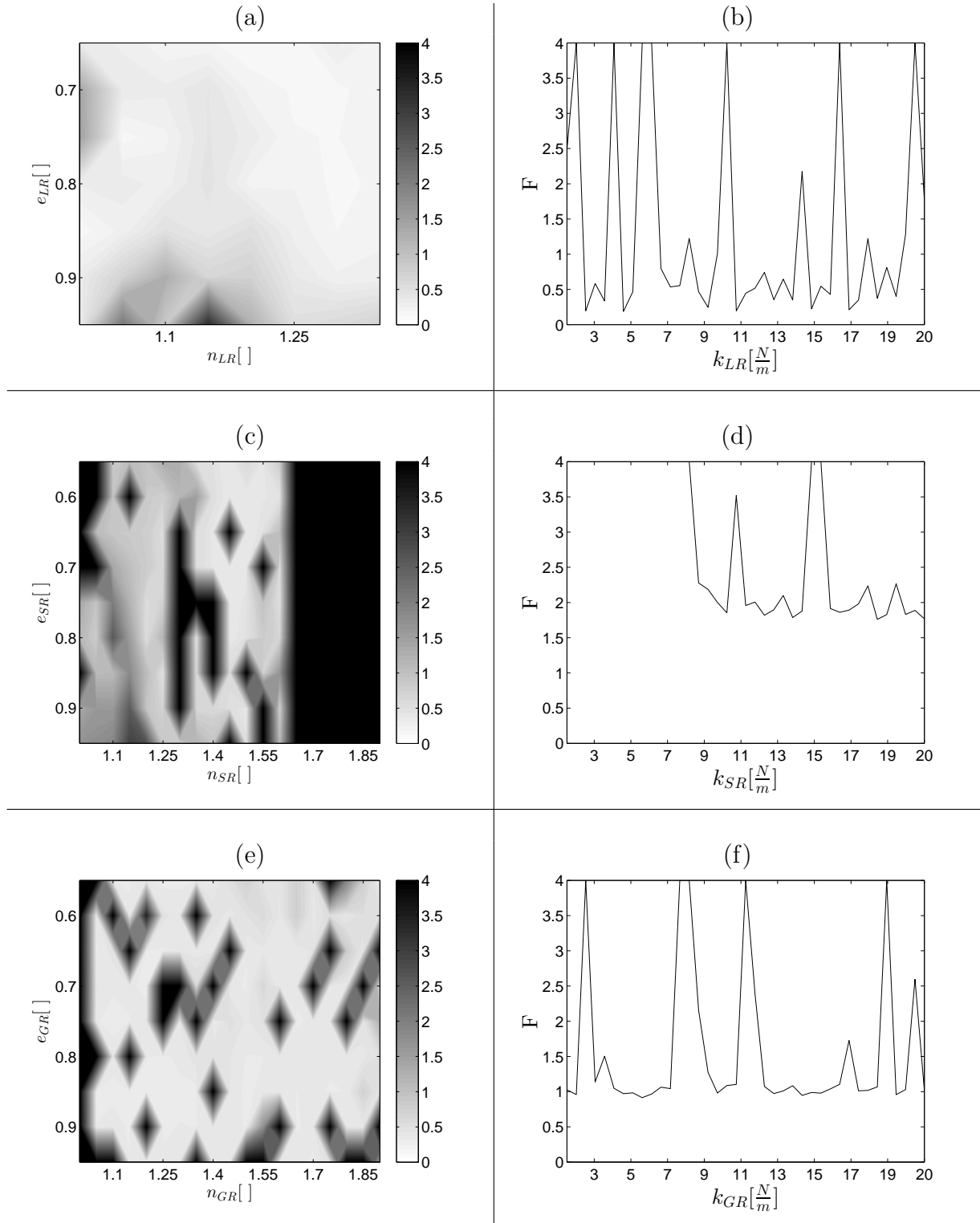


Abbildung A.4: Auswertung der signifikanten Bereiche der Metrik mit Heatmap 1 (a), Heatmap 2 (c), Heatmap 3 (e) - x-y Diagramm (b), x-y Diagramm (d), x-y Diagramm (f). Abweichungen modelliert mit Shape-Preserving-Splines. Berechnung der Metrik mit $\alpha_{y_{lms}} = 1$, $\alpha_{z_{lms}} = 1$, $\alpha_{y_{psd}} = 1$, $\alpha_{z_{psd}} = 1$.

B Detaillierte Identifikationsergebnisse mit angepasster Metrik

B.1 Variation I: Erhöhte Gewichtung der Vertikalrichtung

#	Modellparameter									Metrik			
	k_{LR}	e_{LR}	n_{LR}	k_{SR}	e_{SR}	n_{SR}	k_{GR}	e_{GR}	n_{GR}	$F_{y_{lms}}$	$F_{z_{lsm}}$	$F_{y_{psd}}$	$F_{z_{psd}}$
SW	3.5	0.75	1.125	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	253.99	70.14	0.0165	$1.12^* 10^{-4}$
HM1	3.5	0.75	1.15	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	96.57	53.97	0.0027	$8.15^* 10^{-5}$
P1	3.5	0.75	1.15	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	96.57	53.97	0.0027	$8.15^* 10^{-5}$
HM2	3.5	0.75	1.15	14.0	0.95	1.65	3.5	0.5	1.6	137.89	40.82	0.0023	$7.65^* 10^{-5}$
P2	3.5	0.75	1.15	14.5	0.95	1.65	3.5	0.5	1.6	120.36	40.70	0.002	$7.86^* 10^{-5}$
HM3	3.5	0.75	1.15	14.5	0.95	1.65	3.5	0.95	1.2	144.89	40.07	0.002	$6.8^* 10^{-5}$
P3	3.5	0.75	1.15	14.5	0.95	1.65	5.0	0.95	1.2	128.55	37.59	0.002	$7.08^* 10^{-5}$
Verringerung der Metrik von SW zu P3 um:										49.4%	46.5%	87.9%	36.8%

Tabelle B.1: Entwicklung der Modellparameter und die daraus folgende Änderung der Metriken durch Anwendung der neuen Identifikationsmethode

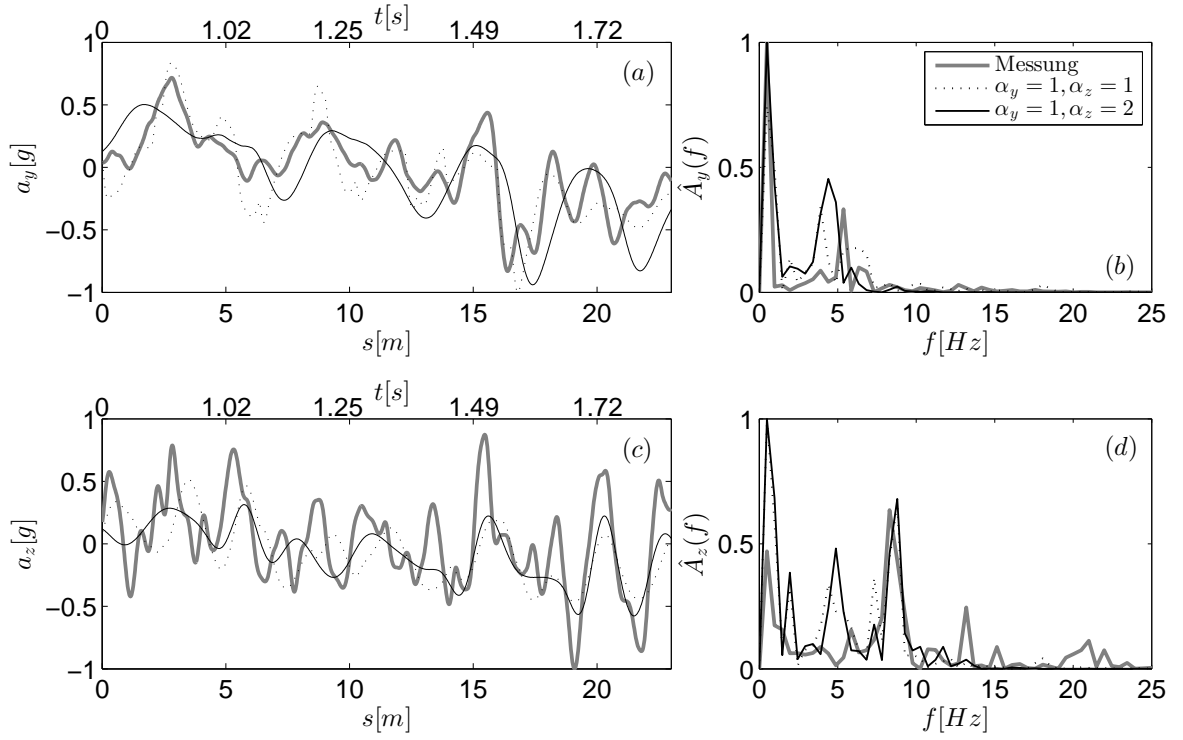


Abbildung B.1: Verifikation und Validierung der neuen Simulationsergebnisse: laterale (a) - vertikale (c) Beschleunigungen und laterale (b) - vertikale Spektraldichte (d). Abweichungen modelliert mit Dierckx-Splines ($S=0.0002$). Berechnung der Metrik mit $\alpha_{y_{lms}}=1, \alpha_{z_{lms}}=2, \alpha_{y_{psd}}=1, \alpha_{z_{psd}}=2$

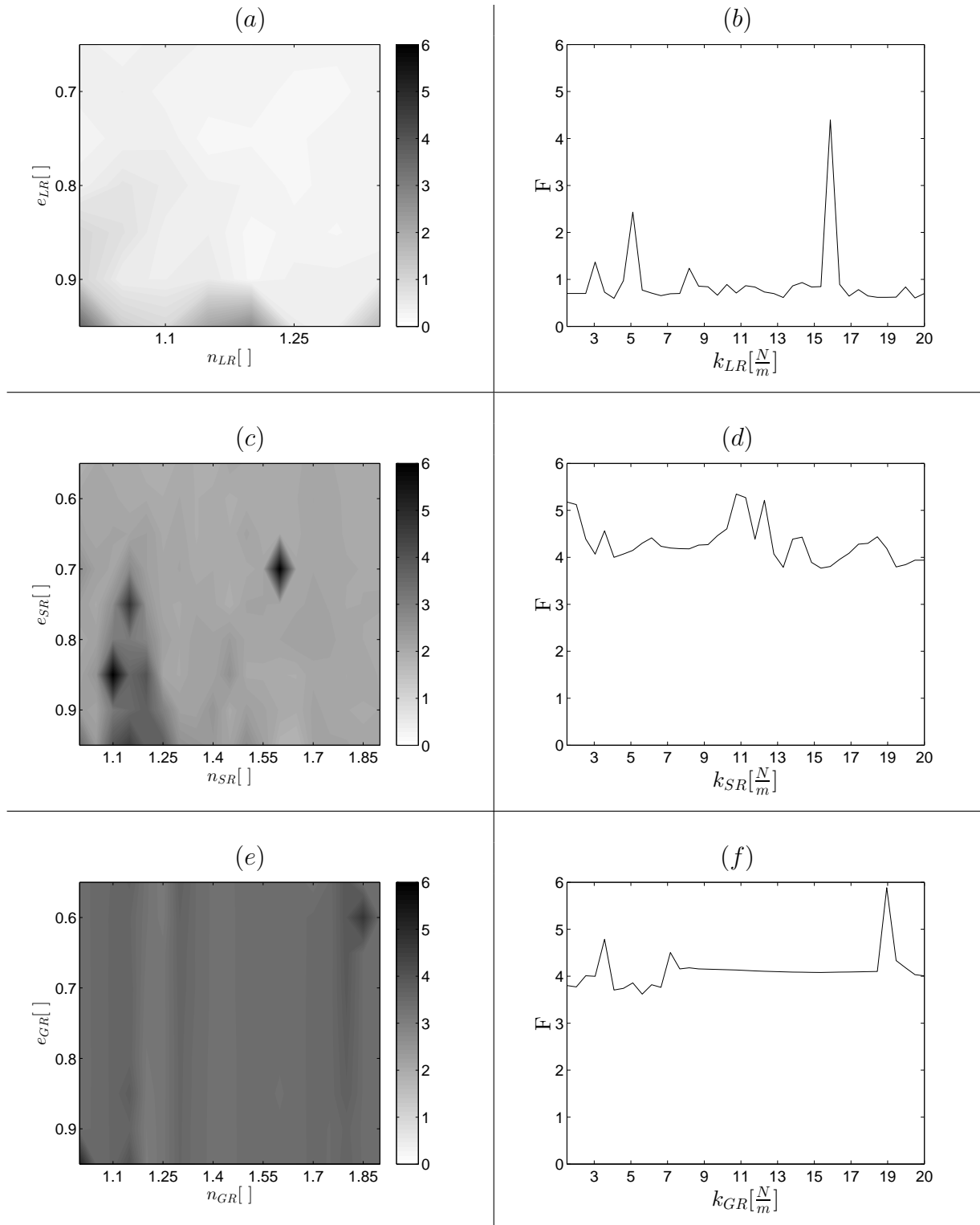


Abbildung B.2: Auswertung der Metrik mit Heatmap 1 (a), Heatmap 2 (c), Heatmap 3 (e) - Plot 1 (b), Plot 2 (d), Plot 3 (f). $\alpha_{y_{lms}} = 1$, $\alpha_{z_{lms}} = 2$, $\alpha_{y_{psd}} = 1$, $\alpha_{z_{psd}} = 2$

B.2 Variation II: Gesamtmetrikreduktion auf Zeitbereich

	Modellparameter									Metrik			
#	k_{LR}	e_{LR}	n_{LR}	k_{SR}	e_{SR}	n_{SR}	k_{GR}	e_{GR}	n_{GR}	$F_{y_{lms}}$	$F_{z_{lsm}}$	$F_{y_{psd}}$	$F_{z_{psd}}$
SW	3.5	0.75	1.125	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	253.99	70.14	0.0165	$1.12^* 10^{-4}$
HM1	3.5	0.75	1.15	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	96.57	53.97	0.0027	$8.15^* 10^{-5}$
P1	3.5	0.75	1.15	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	96.57	53.97	0.0027	$8.15^* 10^{-5}$
HM2	3.5	0.75	1.15	14.0	0.95	1.65	3.5	0.5	1.6	137.89	40.82	0.0023	$7.65^* 10^{-5}$
P2	3.5	0.75	1.15	14.5	0.95	1.65	3.5	0.5	1.6	120.36	40.70	0.002	$7.86^* 10^{-5}$
HM3	3.5	0.75	1.15	14.5	0.95	1.65	3.5	0.55	1.25	171.89	50.54	0.002	$7.01^* 10^{-5}$
P3	3.5	0.75	1.15	14.5	0.95	1.65	5.0	0.55	1.25	122.37	38.05	0.002	$7.21^* 10^{-5}$
	Verringerung der Metrik von SW zu P3 um:									51.2%	45.3%	87.9%	35.6%

Tabelle B.2: Entwicklung der Modellparameter und die daraus folgende Änderung der Metriken durch Anwendung der neuen Identifikationsmethode

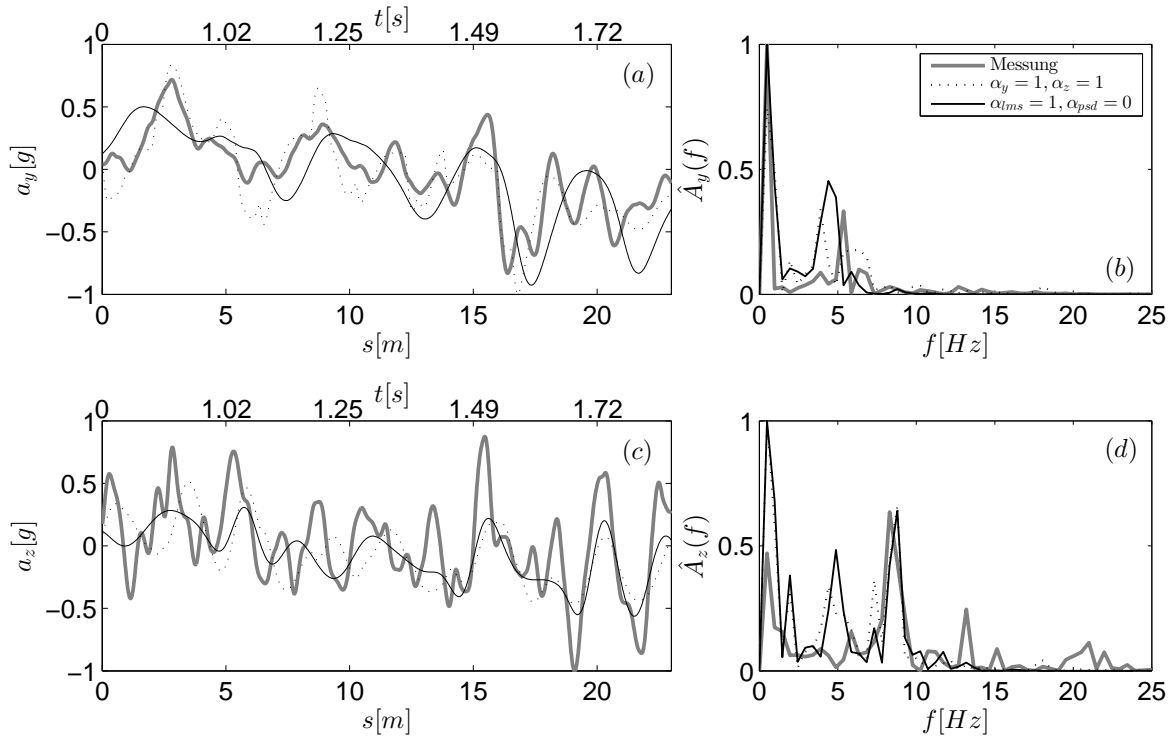


Abbildung B.3: Verifikation und Validierung der neuen Simulationsergebnisse: laterale (a) - vertikale (c) Beschleunigungen und laterale (b) - vertikale Spektraldichte (d). Abweichungen modelliert mit Dierckx-Splines ($S=0.0002$). Berechnung der Metrik mit $\alpha_{y_{lms}}=1$, $\alpha_{z_{lms}}=1$, $\alpha_{y_{psd}}=0$, $\alpha_{z_{psd}}=0$

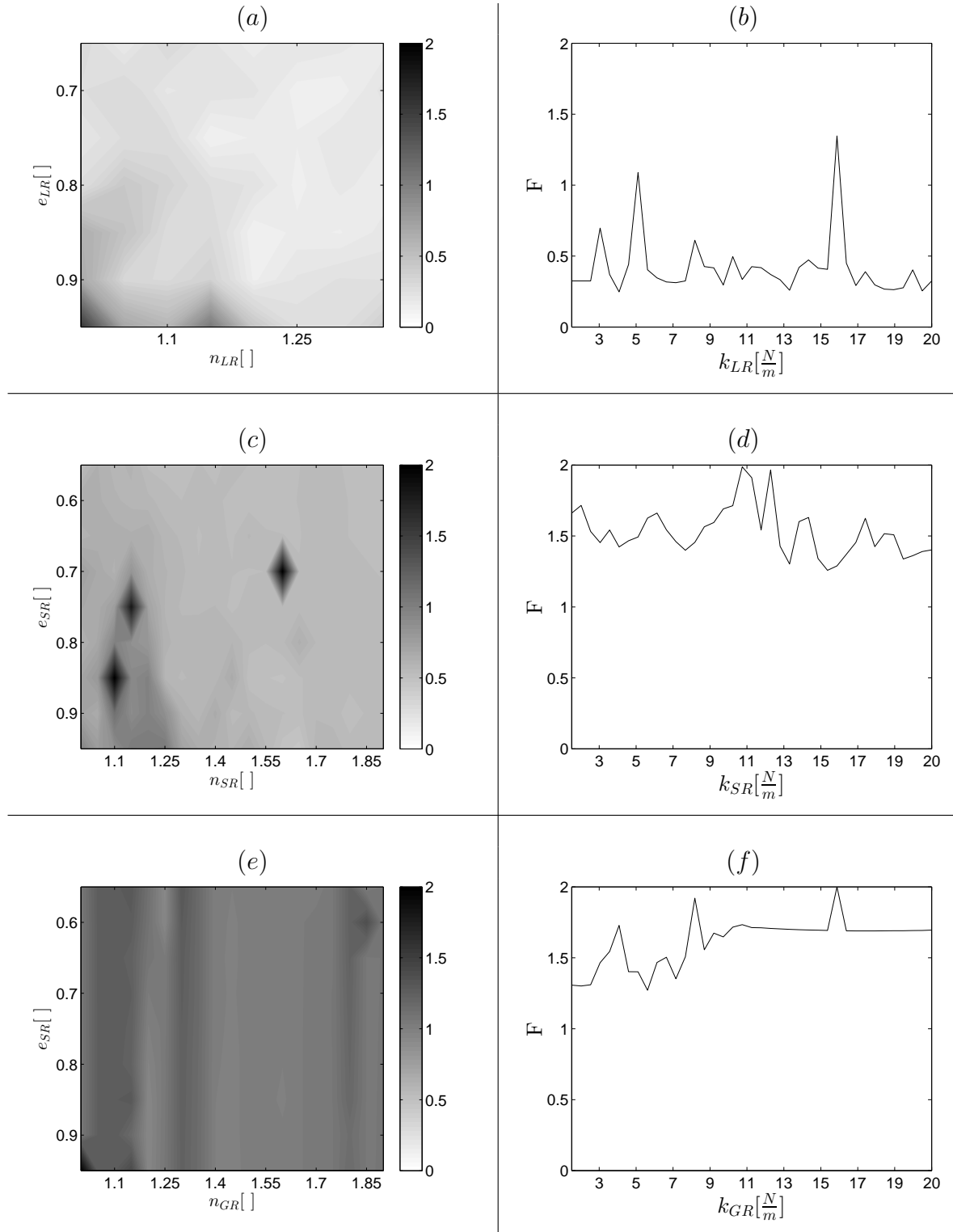


Abbildung B.4: Auswertung der Metrik mit Heatmap 1 (a), Heatmap 2 (c), Heatmap 3 (e) - Plot 1 (b), Plot 2 (d), Plot 3 (f). $\alpha_{ylms} = 1$, $\alpha_{zllms} = 1$, $\alpha_{ypsd} = 0$, $\alpha_{zpsd} = 0$

B.3 Variation III: Gesamtmetrikreduktion auf Frequenzbereich

#	Modellparameter									Metrik			
	k_{LR}	e_{LR}	n_{LR}	k_{SR}	e_{SR}	n_{SR}	k_{GR}	e_{GR}	n_{GR}	F_{ylms}	F_{zlsn}	F_{ypsd}	F_{zpsd}
SW	3.5	0.75	1.125	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	253.99	70.14	0.0165	$1.12^* 10^{-4}$
HM1	3.5	0.85	1.2	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	84.26	69.7	0.002	$9.35^* 10^{-5}$
P1	3.5	0.85	1.2	14.0	0.85	1.25	3.5	0.5	1.6	84.26	69.7	0.002	$9.35^* 10^{-5}$
HM2	3.5	0.85	1.2	14.0	0.95	1.65	3.5	0.5	1.6	133.22	57.78	0.0016	$7.0^* 10^{-5}$
P2	3.5	0.85	1.2	18.5	0.95	1.65	3.5	0.5	1.6	127.32	50.95	0.0012	$7.03^* 10^{-5}$
HM3	3.5	0.85	1.2	18.5	0.95	1.65	3.5	0.55	1.5	143.04	63.28	$9.91^* 10^{-4}$	$8.75^* 10^{-5}$
P3	3.5	0.85	1.2	18.5	0.95	1.65	2.0	0.55	1.5	136.45	55.6	0.0011	$7.01^* 10^{-5}$
Verringerung der Metrik von SW zu P3 um:										46.3%	20.3%	93.3%	37.5%

Tabelle B.3: Entwicklung der Modellparameter und die daraus folgende Änderung der Metriken durch Anwendung der neuen Identifikationsmethode

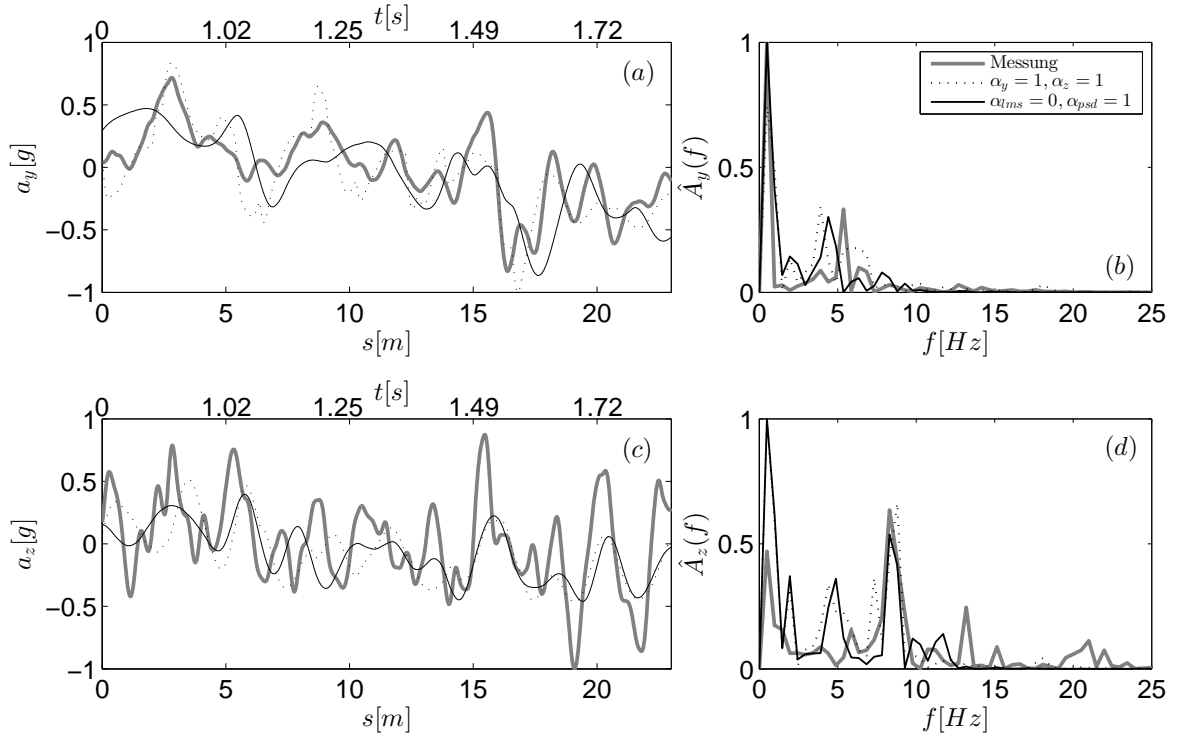


Abbildung B.5: Verifikation und Validierung der neuen Simulationsergebnisse: laterale (a) - vertikale (c) Beschleunigungen und laterale (b) - vertikale Spektraldichte (d). Abweichungen modelliert mit Dierckx-Splines ($S=0.0002$). Berechnung der Metrik mit $\alpha_{y_{lms}}=0, \alpha_{z_{lms}}=0, \alpha_{y_{psd}}=1, \alpha_{z_{psd}}=1$

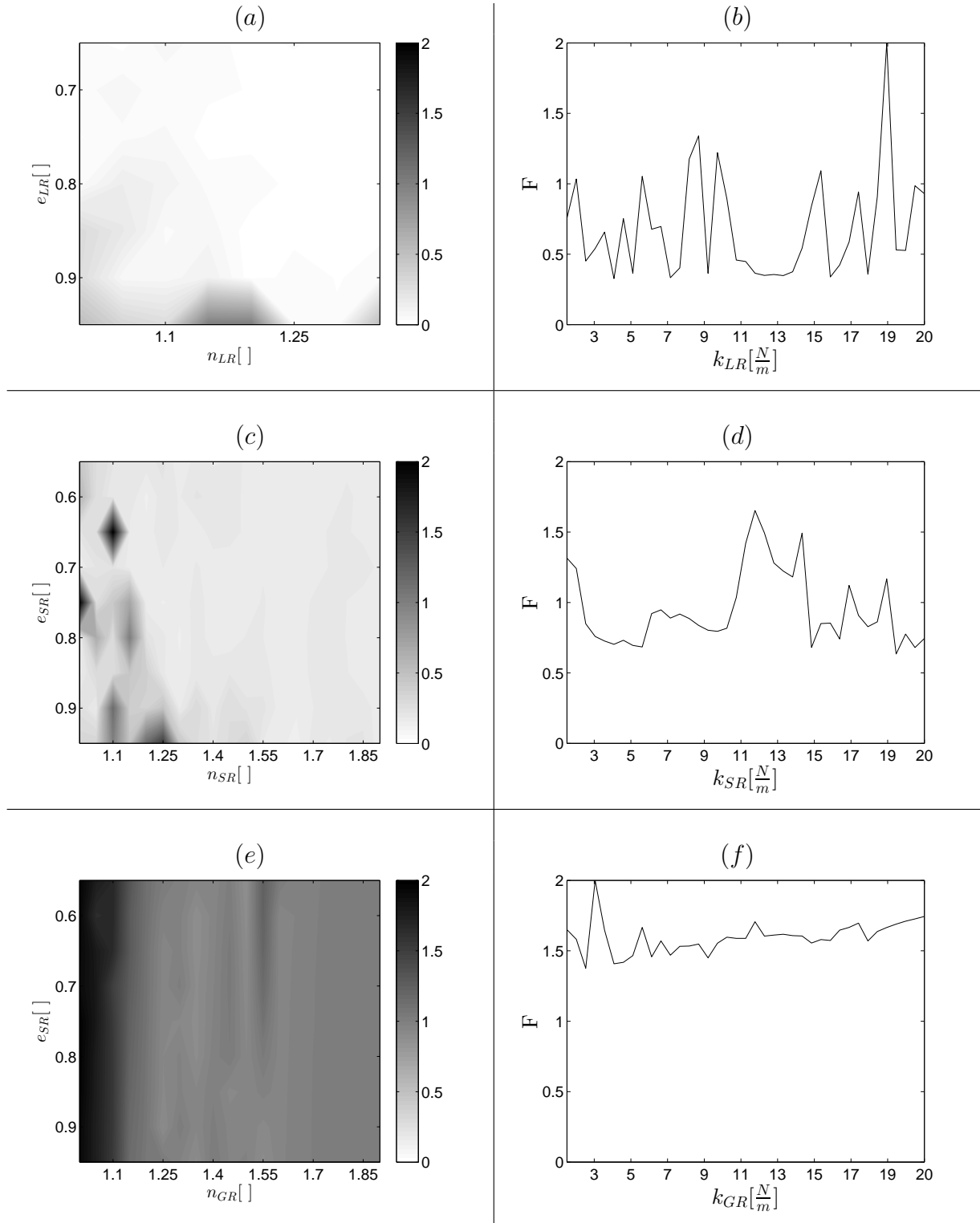


Abbildung B.6: Auswertung der Metrik mit Heatmap 1 (a), Heatmap 2 (c), Heatmap 3 (e) - Plot 1 (b), Plot 2 (d), Plot 3 (f). $\alpha_{y_{lms}} = 0$, $\alpha_{z_{lms}} = 0$, $\alpha_{y_{psd}} = 1$, $\alpha_{z_{psd}} = 1$